



Nasolino Fernandes Varela



Licenciatura em Ensino da Matemática

I.S.E

Setembro de 2007



Nasolino Fernandes Varela



Trabalho de fim do curso apresentado ao I.S.E para obtenção do grau de Licenciatura em Ensino da Matemática, sob orientação de: **Doutora Tetyana M. Gonçalves**



**INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

Trabalho de fim do curso:

“Álgebra de quaterniões e sua utilização para representação de rotação no espaço 3D.”

Elaborado por:

✓ Nasolino Fernandes Varela

Aprovado pelos membros do júri, foi homologado pelo conselho científico em: _____/_____/_____

O júri

Praia, _____de _____de 2007

Dedicatória

À minha mãe, *Alcídia Lopes*, minha rainha.

Aos meus irmãos, *Felisberto Fernandes Varela* e
Maria Lina Fernandes Varela com grande amor.

Agradecimentos

Acredito firmemente no princípio de dualidade aplicada à vida. Da mesma forma que não há o dia sem a noite ou não existe o calor sem o frio, não há realização se não houver trabalho, dedicação e disciplina. Acabo de atingir mais uma meta da minha carreira e da minha vida – A conclusão de um trabalho de fim do curso.

Este período de 5 anos, representou um acúmulo de conhecimento e experiência que jamais eu havia experimentado antes. A sensação de dever cumprido, por ter conseguido realizar algo do qual me orgulho muito, esta monografia, é indescritível. Por estes motivos agradeço do fundo do meu coração e de minha alma à minha família, principalmente à minha mãe e aos meus irmãos, todo o apoio que me deram através do amor, do incentivo e da dedicação, seja me incentivando, me auxiliando e até mesmo me financiando.

Também agradeço à minha orientadora *Doutora Tetyana M. Gonçalves*, pessoa esta cuja inteligência, esforço e atenção em mim dedicados, foram fundamentais para que esta monografia fosse terminada com êxito.

À professora Doutora Natália D. Furtado, agradeço as valiosas contribuições e sugestões que me proporcionou na escolha do tema.

Ainda quero registrar aqui o meu público agradecimento a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

Acima de tudo, agradeço a Deus, meu pai, que me sustenta e me guia por caminhos seguros.

A todos os meus sinceros agradecimentos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	6
I. NOTA HISTÓRICA	11
II. ÁLGEBRA DOS QUATERNIÕES	15
2.1. Conceito dos quaterniões.....	15
2.2. Construção dos quaterniões a partir dos números complexos.....	16
2.3. Representação algébrica dos números quaterniões.....	18
2.4. Operações sobre números quaterniões	19
2.5. Representação trigonométrica dos quaterniões.....	31
III. APLICAÇÃO DOS QUATERNIÕES	43
3.1. Rotações em 2D e números complexos.....	43
3.2. Representações de rotações no espaço 3D	46
3.2.1. Ângulos de Euler.....	49
3.2.1.1. Especificidade das rotações tridimensionais.....	50
3.2.1.2. Representação de orientações fixas.....	51
3.2.1.3. Representação de orientações mutáveis.....	52
3.2.2. Rotação ao redor de um eixo.....	58
3.2.3. Generalizando os números complexos.....	60
CONCLUSÃO	71
FONTES BIBLIOGRÁFICAS	72
ANEXO	73

INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresentam-se as investigações do matemático William Rowan Hamilton (1805-1865), que conduziram à caracterização de certos objectos matemáticos chamados **Quaterniões**. Embora tais objectos tenham, inicialmente, gerado muitas expectativas de aplicações, sobretudo pelas possibilidades de síntese que representavam, no tratamento de grandezas escalares e vectoriais, em pouco tempo as investigações em matemática conduziram a outros rumos e outros objectos, revelaram-se mais fecundos, aproximando o estudo dos quaterniões da análise de um desvio, ou de mera curiosidade histórica. Quaterniões constitui uma contribuição significativa para o estudo dos números complexos e, em geral, para o desenvolvimento da álgebra.

A *Teoria dos Quaterniões* foi comunicada pela primeira vez durante uma reunião da academia Irlandesa, realizada em 16 de Outubro de 1843.

A teoria dos quaterniões foi, durante vários anos, objecto de investigação em matemática; só no século XIX foram publicadas a volta de 600 investigações científicas nessa área e suas aplicações em física, **geometria**, teoria dos números etc.

O famoso físico inglês D.K. Makkebel (1831-1875) introduziu quaterniões em suas equações – base da teoria de electromagnetismo. O cálculo vectorial tem origem em quaterniões (como casos particulares). As regras de adição, subtracção são as mesmas das do cálculo dos quaterniões. O conceito do produto de dois vectores surgiu na teoria dos quaterniões. A parte escalar, tomada com sinal “menos”.

Este trabalho constitui um material, para a análise da trajectória de uma pesquisa em busca de solução para um problema, ao mesmo tempo em que delineiam uma lógica para a investigação que nem de longe pode ser identificada com a lógica da exposição de um conhecimento já sistematizado. As novidades introduzidas ampliando teorias existentes, concessões e violações às regras estabelecidas, feitas de modo extremamente criterioso, estão claras e didacticamente explícitas nesse texto.

A presente monografia desenvolve pesquisas que o conduzem à elaboração de uma teoria cujos elementos centrais são expressões algébricas formadas por quatro elementos numéricos -os **quaterniões**-, sendo três termos imaginários e um real. Contém um relato vivo dessas pesquisas, dando conta das conquistas e de suas hesitações na criação de novos conceitos. Ao mesmo tempo

em que mergulha na abstracção matemática para articular estruturas com os novos elementos imaginados, procura inseri-los em teorias já estabelecidas.

Nossa leitura sobre os quaterniões permitiu a compreensão mais nítida do significado das investigações de Hamilton, além de mostrar uma efectiva contribuição à álgebra e ao estudo dos números complexos.

Propomo-nos aqui a acompanhar um trecho das pesquisas da teoria dos quaterniões e sua utilização para representação de rotação no espaço, tendo como preocupação temática identificar alguns passos que levaram especificamente à concepção de um produto de dois vectores (o produto vectorial) e representação de rotação no espaço. Visando contextualizar algumas preocupações que deram origem a essas concepções nesse campo. Em função deste objectivo, em vez de fazer um relato linear de tal desenvolvimento, preocupamo-nos em levantar algumas das barreiras conceptuais que marcaram a sua história.

Reverendo o actual programa de matemática no ensino superior em Cabo Verde, podemos notar que nele nada é dito sobre quaterniões, o que serviu como uma causa (além dos nossos objectivos) para escrevermos o presente trabalho não na qualidade de uma crítica ao programa, mas na qualidade de um apelo ou uma proposta de como se pode aprofundar e desenvolver a teoria dos quaterniões e consequentemente o cálculo vectorial.

O tema é muito abrangente, os assuntos considerados não esgotam todo o leque das aplicações interessantes da teoria dos quaterniões. Há ainda aspectos a desenvolver nos outros trabalhos dessa natureza.

Pretende-se que esta monografia seja acessível a todos os estudantes que se iniciam o estudo da teoria dos quaterniões e satisfaça aos seguintes objectivos:

- ✓ Propor um material de apoio para o estudo dos quaterniões;
- ✓ Compreender os quaterniões e sua utilização para representação de rotação no espaço;
- ✓ Oferecer dados precisos e actualizados para subsidiar a implementação e o seguimento do tema em questão;
- ✓ Proporcionar aos interessados informação actualizada sobre quaterniões, suas aplicações no domínio da matemática;
- ✓ Identificar algumas vantagens do uso de quaterniões na representação de rotação no espaço;
- ✓ Relacionar a álgebra dos quaterniões com a álgebra dos números complexos;

Este trabalho abrange matéria de nível superior, podendo portanto, ser de utilidade para os alunos de curso superior. Alguns parágrafos deste trabalho podem ser considerados nas aulas programadas, outras nas aulas facultativas para os alunos que são capazes de aprender matérias de nível elevado. Neste sentido achamos que o professor deve desenvolver as capacidades de tais alunos e dar-lhes, os seus méritos próprios.

No presente trabalho consta três grandes capítulos:

I-Nota histórica

II-Álgebra de quaterniões

III-Aplicações dos quaterniões

O capítulo I desenvolve o surgimento e a evolução do número quaternião.

O capítulo II contém uma introdução às operações elementares dos números quaterniões e também uma discussão detalhada da construção do número em questão a partir dos números complexos.

O capítulo III trata dos tópicos que são normalmente associados a uma das várias aplicações do número quaternião.

O capítulo II e III principia com proposições claras de definições pertinentes, princípios e teoremas, junto com material ilustrativo e descritivo, seguindo-se um conjunto de exercícios graduados, resolvidos e propostos. Os exercícios resolvidos servem para ilustrar e ampliar a teoria, focalizando os pontos nos quais o estudante se sente continuamente inseguro e provendo a repetição de princípios básicos tão vitais ao aprendizado eficiente. Entre os exercícios incluem-se inúmeras demonstrações de teoremas e derivações dos resultados básicos. A resolução de exercícios, individualmente por cada aluno, é fundamental para a aprendizagem; é, muitas vezes, ao tentar resolver exercícios sozinho que o aluno esclarece novos conceitos e se apercebe de dificuldades de compreensão que não são notadas durante leituras ou participação em aulas. De forma a poder tirar o máximo de proveito deste texto, o aluno deverá resolver uma grande parte de exercícios propostos. Os resultados dos exercícios podem ser verificados por uma lista de respostas em anexo.

Em cada capítulo inicia-se uma nova enumeração dos teoremas, definições, lemas, exercícios, e observações (por exemplo no capítulo I inicia-se em: 1.1, 1.2...) analogamente nos outros capítulos. As fórmulas estão enumeradas continuamente ao longo do texto e inicia-se uma nova enumeração para as notas de rodapé em cada subcapítulo.

A presente monografia foi elaborado com base nas pesquisas bibliográficas e sites de Internet.

Ao longo da elaboração deste trabalho deparamos com algumas dificuldades, tais como:

- ✓ Falta de equipamentos informáticos (computadores com programas de matemática) que nos permitisse dar informações precisas e detalhadas sobre o trabalho;
- ✓ Insuficiência de obras bibliográficas;
- ✓ Constante corte de energia.

Ao longo deste texto, iremos usar, por simplificação da escrita:

$\mathbb{Z} \rightarrow$	Conjunto dos números inteiros;
$\mathbb{R} \rightarrow$	Conjunto dos números reais;
$\mathbb{C} \rightarrow$	Conjunto dos números complexos;
$H \rightarrow$	Conjunto dos números quaterniões;
$H_1 \rightarrow$	Conjunto dos quaterniões unitários;
$H^0 \rightarrow$	Conjunto dos quaterniões não nulos;
$H_{\mathbb{R}^3} \rightarrow$	Subconjunto dos quaterniões puros;
<i>Fig.</i> \rightarrow	Para denotar legenda das figuras;
$\mathbb{R}^2 \rightarrow$	Para denotar conjunto de pontos do plano;
$\mathbb{R}^3 \rightarrow$	Para denotar conjunto de pontos do espaço 3D;
$\mathbb{R}^4 \rightarrow$	Para denotar conjunto de pontos do espaço 4D;
$\text{Im}(q) \rightarrow$	Para denotar a parte imaginária do número quaternião q ;
<i>Ort.</i> \rightarrow	Designação de um vector de comprimento 1;
$\text{Re}(q) \rightarrow$	Para denotar a parte real do número quaternião q ;

$R_z(\theta) \rightarrow$	Para denotar a rotação de um ângulo θ em torno da linha central z;
$R_y(\theta) \rightarrow$	Para denotar a rotação de um ângulo θ em torno da linha central y;
$R_x(\theta) \rightarrow$	Para denotar a rotação de um ângulo θ em torno da linha central x;
$\exists \rightarrow$	Para denotar quantificador existencial (lê-se “existe”);
$\forall \rightarrow$	Para denotar quantificador universal (lê-se “para todo” ou “para qualquer que seja”);
$Tab \rightarrow$	Para denotar tabelas;
$\square \rightarrow$	Para denotar fim de uma demonstração;
$Rot. \rightarrow$	Designação de rotação;
$3D \rightarrow$	Designação do espaço três dimensional;
$2D \rightarrow$	Designação do espaço bidimensional (plano);
$M_4 \rightarrow$	Designação das matrizes reais 4×4 ;
$p.v. \rightarrow$	Designação de uma proposição verdadeira;
$\Leftrightarrow \rightarrow$	Sinal de equivalência (lê-se “equivalente”)

I-NOTA HISTÓRICA

Quaterniões foram introduzidos pelo senhor William Rowan Hamilton, matemático astrónomo Irlandês, em 1843. Hamilton procurava maneiras de estender os números complexos «que podem ser vistos como pontos do plano» a umas dimensões mais elevadas.

Em 1833, obteve como resultado que os números complexos formam uma álgebra de pares ordenados de números reais. Sir William Rowan Hamilton tentou estender este conceito a triplos de números, com um real e dois imaginários. Por mais de uma década, esta questão preocupou Hamilton.

As dificuldades que muitas pessoas têm sentido em relação à doutrina das quantidades negativas e imaginárias em álgebra fizeram com que Hamilton, desde há muito, concentrasse sua atenção nelas. É dessa forma que Hamilton expõe seu problema de partida, no prefácio às *Lectures on Quaternions*. Trechos como este revelam que ele partilhava das preocupações da época com respeito à atribuição de um significado aos números imaginários.

Uma das motivações de Hamilton para procurar números complexos tridimensionais, era encontrar uma descrição de rotações no espaço, análoga ao caso complexo, onde a multiplicação corresponde a uma rotação e a uma mudança de escala.

Representando os números complexos como pares de números reais, mas preservando as mesmas regras que regiam seu produto quando expressos na forma de soma de dois termos, propõe a seguinte equação: $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

Empregando o que vê como "uma extensão natural" de regras já estabelecidas para operações com números ou pelo menos "uma consequência destas regras, ou das concepções que

as sugeriram", ele toma o par $(0,1)$ como representando $\sqrt{-1}$, o que significa expressar a unidade imaginária em termos de números reais. Esse resultado revela-se para Hamilton como "uma clara interpretação sem que nada de obscuro, impossível ou imaginário estivesse de alguma forma envolvido em sua concepção".

Outra preocupação que dirige suas pesquisas é expressa da seguinte forma: havia, entretanto um motivo que lhe induziu a atribuir uma importância especial à consideração de tripletos. Este era o desejo de conectar, de uma forma nova e útil (ou pelo menos interessante), cálculo com geometria, através de uma extensão ainda não descoberta, ao espaço de três dimensões, de um método de construção ou representação, para operações com linhas rectas num plano.

Hamilton refere-se essencialmente à representação geométrica dos números complexos; faz referência específica ao trabalho de Argand⁽¹⁾. Ele salta das duplas para tripletos com um objectivo claro e definido. Usando de uma analogia, começa vendo o espaço como uma extensão do plano definido pelos números complexos: seria natural conceber que deve existir um outro tipo de raiz de (-1) , perpendicular ao plano.

No plano, uma linha podia ser descrita como $a + ib$, com a e b reais; analogamente, no espaço seria representada como $a + bi + cj$, onde j indicaria um segundo eixo imaginário. Hamilton propõe-se, então, a investigar o significado do produto dessas linhas, e ao fazê-lo, procura ser coerente com as regras para multiplicação até então aceites.

De acordo com essas regras, tem-se como resultado da multiplicação de duas linhas, indicadas por $a + bi + cj$ e $x + yi + zj$, a seguinte expressão:

$$(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy) \quad (1)$$

Coerentemente com a forma por ele proposta inicialmente, os três primeiros termos deveriam estar associados às coordenadas espaciais desta nova linha resultante do produto. Qual seria, então, o significado do quarto termo, em ij ? Nas palavras do próprio Hamilton, "ele não percebeu de imediato, o que fazer com esse produto ij ".

Procurando resolver esse problema, ele parte de um caso particular, aquele em que as coordenadas b, c são proporcionais a y, z , de tal forma que as linhas factores encontrem-se em

⁽¹⁾ JEAN ROBERT ARGAND mais conhecido por Argand nasceu em Genebra (Suiça) foi um matemático amador, ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos.

um mesmo plano, contendo o eixo x o que, na verdade, significa uma espécie de redução ao caso do plano complexo. Essa escolha permitiu a comparação com resultados já conhecidos, referentes à multiplicação no plano, que o levaram à seguinte conclusão: "aqui, o quarto termo $ij(bz + cy)$, pareceu-lhe ser simplesmente supérfluo, o que lhe induziu por um momento a pensar que talvez o produto ij devesse ser visto como igual a zero".

Ele percebeu, porém, que havia outra possibilidade de se chegar ao mesmo resultado: "Esta soma desapareceria, sob a presente condição $bz = cy$, se fizéssemos o que pareceu uma suposição menos radical, ou seja, a suposição de que $ij = -ji$ ".

O abandono da propriedade comutativa caracteriza um momento decisivo de seu trabalho. De certa forma, em suas pesquisas anteriores, ao trabalhar com pares de números, Hamilton já havia se deparado com a possibilidade de um tipo de não-comutatividade, pois multiplicar um par (a, b) pela unidade primária, o par $(1, 0)$, ou pela unidade secundária, o par $(0, 1)$ conduzia a diferentes resultados.

Prosseguindo em suas pesquisas, passa a investigar o caso mais geral do produto de duas linhas que não satisfaçam à condição $\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$; nesse caso, diferentemente do anterior, não há possibilidade de a diferença $bz - cy$ se anular. Fazendo já uso da não-comutatividade e atribuindo um nome ao produto ij , ele chega, então, à seguinte expressão:

$$(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy) \quad (2)$$

Seria este quarto termo, que contraria a notação inicialmente escolhida, realmente essencial?

Empregando o princípio que estabelece que o módulo do produto de dois factores deve ser igual ao produto dos módulos desses factores, Hamilton testa e conclui pela efectiva necessidade da presença do quarto termo na expressão (2) acima. Qual seria então a natureza deste novo coeficiente, k ? "Isto levou-lhe a conceber que, em vez de procurar confinar a tripletos. Deveria encará-los apenas como formas imperfeitas de quaterniões, como $a + ib + jc + kd$ ou (a, b, c, d) , o símbolo k indicando um novo tipo de operador unitário". Tendo a mesma natureza que os termos i e j , o coeficiente k assume, então, o papel de indicador da direcção de um terceiro eixo, conduzindo à passagem do plano ao espaço.

Por necessidade de coerência com o princípio relativo aos módulos, esse novo termo deveria ser unitário; quanto à sua natureza, poderia ser revelada a partir de pesquisas quanto ao valor de

seu quadrado que, conforme fosse 1 ou (-1), colocaria esse coeficiente na categoria de real ou imaginário. Hamilton deduz, então, o seguinte valor para k^2 :

$$k^2 = kk = ij \cdot ij = -ii \cdot jj = -i^2 \cdot j^2 = -(-1) \cdot (-1) = -1$$

A partir daí, Hamilton propõe nova representação para linhas no espaço: "Ele percebeu que, se em vez de representar uma linha por um tripleto da forma $x + iy + jz$, concordassem em representá-la por esta outra forma trinomial, $ix + jy + kz$ poderiam então expressar o desejado produto de duas linhas no espaço por um quaternião, cujos componentes possuem interpretações geométricas muito simples".

Trata-se, portanto, de um produto em que a parte real representando um número e a imaginária sendo interpretada como uma linha no espaço tridimensional; a parte espacial, tomada separadamente, foi chamada de produto vectorial.

Com essa representação, o produto de duas linhas no espaço conduz a um elemento, de quatro termos, sendo um deles reais e os outros três imaginários, aos quais estão associados os três eixos espaciais i, j, k . É a este novo elemento, produto de duas linhas, que ele atribui o nome de **Quaternião**.

II-ÁLGEBRA DOS QUATERNIÕES

2.1. Conceito dos quaterniões

Definição 2.1 Um número quaternião é um quádruplo dos números reais (a, b, c, d) , que podemos escrever na forma $q = a + ib + jc + kd$ ou $[a, (b, c, d)]$ (forma vectorial do quaternião), onde a é dito componente ou parte real, (b, c, d) é chamada componente ou parte imaginária de q e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são denominados coeficientes, i, j e k são **unidades imaginárias**.

Os números complexos \mathbb{C} foram obtidos juntando o elemento i aos números reais, onde i satisfaz a propriedade $i^2 = -1$, \mathbb{C} é uma extensão simples algébrica do corpo \mathbb{R} , pois, existe polinómios com coeficientes reais em que suas raízes são números complexos, isto é, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{C}$ tal que: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.

Os quaterniões H são obtidos adicionando os elementos i, j e k aos números reais, onde i, j e k satisfazem as seguintes relações:

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1} \quad (3)$$

Alem disso, para a multiplicação ser associativa, as seguintes relações devem ser respeitadas:

$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j. \end{aligned} \quad (4)$$

A multiplicação não é comutativa. Cada quaternião é uma combinação linear real **dos quaterniões** $1, i, j$ e k **da base**, isto é, cada quaternião é excepcionalmente expresso na forma $a + bi + cj + dk$ onde a, b, c e d são números reais. O seu conjunto representa-se por \mathbf{H} ou Q_8 e define-se como sendo $H = \{q = a + ib + jc + kd, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = ijk = k^2 = -1\}$, onde \mathbb{R} representa o conjunto dos números reais.

Exemplo 2.1: quaterniões

$$q_1 = 4 + i 4 - 3 j$$

$$q_2 = i - 2 j + k$$

$$q_3 = 1 - i + 3 j + k$$

2.2. Construção dos quaterniões a partir dos números complexos

No presente capítulo mostremos a forma fácil e prática de construir um número quaternião a partir de pares de números complexos.

De acordo com a **construção de Cayley-Dickson**, um quaternião é um par requisitado de números complexos. Seja j uma raiz de (-1) , diferente de ambos i e $(-i)$, u e v um par de números complexos, então $q = u + jv$ é um quaternião.

Se $u = a + ib$ e $v = c + id$ então $q = a + ib + jc + jid$.

Além disso toma-se, $ji = -ij$, de modo que $q = a + ib + jc + ij(-d) = a + ib + jc - kd$, e seja o produto dos quaterniões associativo. Observa a relação em (4) que $ij = k$.

Para todo o número complexo $v = c + id$, seu produto com j têm a seguinte propriedade:

$$jv = \bar{v}j$$

Desde que: $jv = j(c + id) = jc + jid = jc - (ij)d = (c - id)j = \bar{v}j$.

Seja p um quaternião com componentes complexos w e z : $p = w + jz$.

Então o produto (qp) é

$$\begin{aligned}(qp) &= (u + jv)(w + jz) = uw + ujz + jvw + jvjz = uw + j\bar{u}z + jvw + jj\bar{v}z = \\ &= (uw - \bar{v}z) + j(\bar{u}z + vw)\end{aligned}$$

Desde que o produto de números complexos é comutativo, temos

$$(u + jv)(w + jz) = (uw - z\bar{v}) + j(\bar{u}z + wv)$$

Pois, se $u = a + ib$, $v = c + id$ e $p = a + ib + jc + kd$ então a construção de p a partir de u e v é o seguinte: $p = u + vj = u + j\bar{v}$.

Exercícios:

2.1. Construir os números quaterniões a partir dos seguintes pares de números complexos.

$$a) u = 1 + 2i \text{ e } v = 2 + i; \quad b) u = 1 + i \text{ e } v = 2 - 2i$$

Resolução

a)

$$q = u + jv = 1 + 2i + j(2 + i) = 1 + 2i + 2j + ji = 1 + 2i + 2j - ij = 1 + 2i + 2j - k \Leftrightarrow q = 1 + 2i + 2j - k$$

b)

$$p = u + jv = 1 + i + j(2 - 2i) = 1 + i + 2j - 2ji = 1 + i + 2j + 2ij = 1 + i + 2j + 2k \Leftrightarrow p = 1 + i + 2j + 2k$$

Exercícios propostos

2.2. Construir os números quaterniões a partir dos seguintes pares de números complexos.

$$a) u = 5 - i \text{ e } v = 1 + i; \quad b) u = i \text{ e } v = 1 + i; \quad c) u = a + ib \text{ e } v = c + id.$$

2.3. Mostrar que, além de ser $i^2 = -1$, tem-se também $j^2 = -1$ e $k^2 = -1$, assim como as igualdades: $i = jk = -kj$, $j = ki = -ik$, $k = ij = -ji$.

2.3. Representação algébrica dos quaterniões

Um número quaternião pode ser representada **algebricamente** por $q = a + ib + jc + kd$ ou $q = a + \vec{n}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ onde $\vec{n} = bi + cj + dk$. Diz-se que:

a é a **parte real** de q e escreve-se $\text{Re}(q) = a$ ou $\text{sc}(q) = a$;

(b, c, d) ou seja $\vec{n} = bi + cj + dk$ é a **parte imaginária ou vectorial** de q e escreve-se

$\text{Im}(q) = (b, c, d) = bi + cj + dk$ **ou** $\text{vec}(q) = (b, c, d) = bi + cj + dk$, algumas vezes é chamado de quaternião vectorial.

Também existe uma forma alternativa de representar um quaternião como um par ordenado do tipo $q = (a, \vec{n})$, onde, $\vec{n}(b, c, d)$, ou seja, um quaternião pode ser visto como um par ordenado, onde a primeira coordenada é um escalar e a segunda é um vector.

Diz-se que:

- ✓ O quaternião q é um **número real** se e só se $\text{Im}(q) = 0$ e $\text{Re}(q) \neq 0$;
- ✓ O quaternião q é um **imaginário puro ou quaternião puro** se e só se $\text{Re}(q) = 0$ e $\text{Im}(q) \neq 0$;
- ✓ O quaternião q é **nulo** se e só se $\text{Re}(q) = \text{Im}(q) = 0$;

Definição 2.2 (Igualdade dos Números Quaterniões na forma algébrica)

Dados dois números quaterniões q_1 e $q_2 \in H$ tais que $q_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1$ e $q_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2$ com $a_l, b_l, c_l, d_l \in \mathbb{R} (l = \overline{1, 2})$ dizemos que $q_1 = q_2$ sse $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ e $d_1 = d_2$

Definição 2.3 (Identities)

Há dois quaterniões da identidade.

Chama-se a identidade relativamente à operação da multiplicação o quaternião $q = (1, 0, 0, 0)$

Chama-se quaternião da identidade relativamente à operação de adição (usual) $q = (0, 0, 0, 0)$.

Definição 2.4 (Simétrico do número quaternião)

O **simétrico** de um número quaternião $q = a + ib + jc + kd$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ é o número $-q = -(a + ib + jc + kd) = -a + i(-b) + j(-c) + k(-d)$ tal que $q + (-q) = 0 = (0, 0, 0, 0)$

Lema 2.1. Seja q um número quaternião, então:

- (i) $\text{Re}(-q) = -\text{Re}(q)$;
- (ii) $\text{Im}(-q) = -\text{Im}(q)$;

2.4. Operações sobre números quaterniões

A soma e o produto entre quaterniões introduzem-se, partindo das propriedades algébricas usuais sobre os números reais.

Definição 2.5 (Adição)

Dados dois quaterniões q_1 e $q_2 \in H$, onde $q_1 = a + ib + jc + kd$ e $q_2 = e + if + jg + kh$ a soma $q_1 + q_2$ é o número quaternião tal que:

$$q_1 + q_2 = (a + ib + jc + kd) + (e + if + jg + kh) = (a + e) + i(b + f) + j(c + g) + k(d + h)$$

Teorema 2.1. Sejam $p, q, q', 0 \in H$. A adição de quaterniões goza das seguintes propriedades:

- (i) $p + q = q + p$;
- (ii) $[p + (q + q')] = [(p + q) + q']$;
- (iii) $q + 0 = 0 + q = q$;
- (iv) $q + (-q) = 0$.

Onde 0 é o quaternião nulo ou quaternião de identidade para a adição.

Demonstração

Mostremos algumas dessas igualdades, deixando as outras ao cargo do leitor.

(i) Mostremos que $p + q = q + p$

Seja $q = a + ib + jc + kd$ e $p = e + if + jg + kh$.

$$\begin{aligned} p + q &= (e + if + jg + kh) + (a + ib + jc + kd) = (e + a) + i(f + b) + j(g + c) + k(h + d) = \\ &= (a + e) + i(b + f) + j(c + g) + k(d + h) = (a + ib + jc + kd) + (e + if + jg + kh) = q + p. \end{aligned}$$

Tendo em conta que “+” é comutativa em \mathbb{R} . \square

(ii) Mostremos que $[p + (q + q')] = [(p + q) + q']$

Seja $q' = a' + ib' + jc' + kd'$, $q = a + ib + jc + kd$ e $p = e + if + jg + kh$

$$\begin{aligned} [p + (q + q')] &= [e + if + jg + kh + (a + a') + i(b + b') + j(c + c') + k(d + d')] = \\ &= [e + (a + a') + i(f + (b + b')) + j(g + (c + c')) + k(h + (d + d'))] = \\ &= [(e + a) + a' + i((f + b) + b') + j((g + c) + c') + k((h + d) + d')] = \\ &= [(e + a) + i(f + b) + j(g + c) + k(h + d) + a' + ib' + jc' + kd'] = \\ &= [(p + q) + q']. \end{aligned}$$

Tendo em conta que “+” é associativa em \mathbb{R} . \square

Observação2.1: A subtracção define-se como é habitual em $(\mathbb{R}$ e $\mathbb{C})$ ou se

$q_1 = a + ib + jc + kd$ e $q_2 = e + if + jg + kh$, então

$$q_1 - q_2 = q_1 + (-q_2) = (a + ib + jc + kd) - (e + if + jg + kh) = (a - e) + i(b - f) + j(c - g) + k(d - h)$$

Observação2.2: Subtrair dois números quaterniões é o mesmo que adicionar o primeiro número pelo simétrico do segundo número.

Definição 2.6 (Multiplicação)

Dados dois quaterniões q_1 e $q_2 \in H$, onde $q_1 = a + ib + jc + kd$ e $q_2 = e + if + jg + kh$ o produto

$$(q_2 \cdot q_1) \text{ é o número quaternião tal que: } (q_2 \cdot q_1) = (a + ib + jc + kd) \cdot (e + if + jg + kh)$$

As regras da multiplicação para os factores imaginários são (3) e (4) a cima.

Anote-se que a ordem da multiplicação é significativa, em outras palavras $(q_1.q_2)$ não é necessariamente igual a $(q_2.q_1)$, podemos esperar isso pois os quaterniões podem ser usados para representar rotações e a ordem das rotações é significativa.

A multiplicação dos quaterniões não é necessariamente comutativo, alguns subconjuntos dos quaterniões podem comutar, por exemplo:

Partes reais: $ae = ea$;

Partes reais e imaginárias: $a(if) = (if)a$;

A mesma parte imaginária: $(ib).(if) = (if).(ib) = (-bf)$.

Outros subconjuntos dos quaterniões anti-comutam, isto é, inverter a ordem equivale a multiplicação do resultado por (-1). Quando as quantidades imaginárias permutam na multiplicação surgem mudanças de sinais, como se pode ver na seguinte tabela.

a	b	1	i	j	k
1	1	1	i	j	k
i	i	i	-1	k	$-j$
j	j	j	$-k$	-1	i
k	k	k	j	$-i$	-1

Tab.2.1

Utilizando a tabela 2.1, multipliquemos dois quaterniões.

Seja $q_1 = a + ib + jc + kd$ e $q_2 = e + if + jg + kh$ então

$$\begin{aligned}
 (q_1.q_2) &= (a + ib + jc + kd).(e + if + jg + kh) = \\
 &= a(e + if + jg + kh) + ib(e + if + jg + kh) + jc(e + if + jg + kh) + kd(e + if + jg + kh) = \\
 &= ae + iaf + jag + kah + ibe + i^2bf + ijbg + ikbh + jce + jicf + j^2cg + jkch + kde + kidf + kjdg + k^2dh = \\
 &= ae + iaf + jag + kah + ibe - bf + ijbg + ikbh + jce + jicf - cg + jkch + kde + kidf + kjdg - dh = \\
 &= ae + iaf + jag + kah + ibe - bf + kbg - jbh + jce - kcf - cg + ich + kde + jdf - idg - dh = \\
 &= ae - bf - cg - dh + i(af + be + ch - dg) + j(ag + ce - bh + df) + k(ah + bg + de - cf)
 \end{aligned}$$

Assim o resultado é:

$$(q_1 \cdot q_2) = ae - bf - cg - dh + i(af + be + ch - dg) + j(ag + ce - bh + df) + k(ah + bg + de - cf)$$

É fácil ver que $(q_1 \cdot q_2) \neq (q_2 \cdot q_1)$, por simples e cuidadosa aplicação das mesmas regras.

Definição 2.7 A multiplicação não-comutativa usual entre dois quaterniões é denominada por **produto de Grassmann**.

Exemplo 2.2: Seja x e y dois números quaterniões definidos por: $x = 3 + i$ e $y = 5i + j - 2k$

Então:

$$x - y = 3 + i - (5i + j - 2k) = 3 + i - 5i - j + 2k = 3 - 4i - j + 2k$$

$$x + y = 3 + i + 5i + j - 2k = 3 + 6i + j - 2k$$

$$\begin{aligned} xy &= (3 + i)(5i + j - 2k) = 15i + 3j - 6k + 5i^2 + ij - 2ik \\ &= 15i + 3j - 6k - 5 + k + 2j = -5 + 15i + 5j - 5k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} yx &= (5i + j - 2k)(3 + i) = 15i + 5i^2 + 3j + ji - 6k - 2ki \\ &= 15i - 5 + 3j - k - 6k - 2j = -5 + 15i + j - 7k \end{aligned}$$

Teorema 2.2. Sejam $p, q, q' \in H$. O produto de quaterniões goza das seguintes propriedades:

- (i) $pq \neq qp$, em geral;
- (ii) $(pq)q' = p(qq')$;
- (iii) $p(q + q') = pq + pq'$;
- (iv) $(q + q')p = qp + q'p$.

Demonstração

Mostremos algumas dessas igualdades, deixando os outros ao cargo do leitor

(i) Mostremos que $pq \neq qp$

Seja $q = a + ib + jc + kd$ e $p = e + if + jg + kh$.

Supomos que $pq = qp \Leftrightarrow pq - qp = 0$

$$\begin{aligned} pq &= ea - fb - gc - hd + i(eb + fa + gd - hc) + j(ec + ga - fd + hb) + k(ha + fc + ed - gb) \\ qp &= ae - bf - cg - dh + i(af + be + ch - dg) + j(ag + ce - bh + df) + k(ah + bg + de - cf) \end{aligned}$$

Mas $pq - qp \neq 0 \Leftrightarrow pq \neq qp$. \square

Consequentemente, H é uma **álgebra não comutativa**, a **álgebra dos quaterniões**. A associatividade do produto de quaterniões torna a álgebra dos quaterniões numa **álgebra associativa**.

Ainda em relação à comutatividade, o lema seguinte esclarece em que situações um dado quaternião comuta com qualquer outro.

Lema 2.2. Um quaternião p é real se e só se, para qualquer outro quaternião q , se tem $pq = qp$.

Demonstração

$$i) \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R} \forall q \in H : pq = qp$$

Seja p real e $q = e + if + jg + kh$ mostremos que $pq = qp$.

$$\begin{aligned} pq &= a(e + if + jg + kh) = ae + aif + ajg + akh = \\ &= ea + ifa + jga + kha = (e + if + jg + kh)a = qp \text{ onde } p \text{ pode ser da forma } p = a + i0 + j0 + k0. \end{aligned}$$

$$ii) \Leftarrow \text{Supomos que } pq = qp \text{ mostremos que } p \in \mathbb{R}, \forall q \in H.$$

Pelo teorema 2.2 (i) $pq \neq qp$, neste caso, para $pq = qp$ só pode ser $p \in \mathbb{R}$. \square

Sempre que não haja dúvidas quanto à operação de multiplicação envolvida, omitiremos, por simplificação da escrita, o símbolo \ast ou \bullet .

Exercícios propostos:

2.4. Efectuar cada uma das operações indicadas:

$$\begin{aligned} a) (3 + 2i + j) + (-7 - i); \quad b) (-7 - k) + (3 + 2i + j + 2k); \quad c) (8 - 6i) - (i - 7); \\ d) (5 + 3i) + \{(-1 + j) + (7 - 5i)\}; \quad e) (2 - 3i) \cdot (4 + 2k); \quad f) (2 - j) \cdot \{(-3 + 2i) \cdot (5 - 4j)\} \end{aligned}$$

2.5. Mostrar os itens (ii), (iii) e (iv) do teorema 2.2.

2.6. Mostrar o lema.2.1

Definição 2.8 Seja $q \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $q = a + ib + jc + kd$ e $\alpha = \alpha + 0$ onde $0 = 0i + 0j + 0k$ o produto de um escalar por um quaternião $(\alpha.q)$ é o número quaternião tal que:

$$\alpha.q = (\alpha + 0) \cdot (a + ib + jc + kd) = \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

De seguida, são apresentados alguns resultados que se podem obter, de imediato, usando as definições introduzidas anteriormente.

Teorema 2.3. Sejam $p, q, q' \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. O produto de um escalar por um quaternião goza das seguintes propriedades:

$$(i) \quad \alpha q = q\alpha;$$

$$(ii) \quad p(\alpha q + \beta q') = \alpha pq + \beta pq';$$

$$(iii) \quad (\alpha q + \beta q')p = \alpha qp + \beta q'p$$

Demonstração

$$(i) \text{ Mostremos que } \alpha q = q\alpha$$

Seja $q = a + ib + jc + kd$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ logo

$$\alpha q = \alpha(a + ib + jc + kd) = \alpha a + \alpha ib + \alpha jc + \alpha kd = \alpha a + i\alpha b + j\alpha c + k\alpha d = (a + ib + jc + kd)\alpha = q\alpha. \square$$

$$(ii) \text{ Mostremos que } p(\alpha q + \beta q') = \alpha pq + \beta pq'$$

$$p(\alpha q + \beta q') = p\alpha q + p\beta q' = \alpha pq + \beta pq' \text{ Tendo em conta que } \alpha q = q\alpha \text{ e a}$$

distributividade do número quaternião. \square

$$(iii) \text{ Mostremos que } (\alpha q + \beta q')p = \alpha qp + \beta q'p$$

Esta igualdade obtém-se aplicando apenas a propriedade distributiva em relação á adição «teorema 2.2 (iv)» como segue,

$$(\alpha q + \beta q')p = \alpha qp + \beta q'p. \square$$

Consequentemente, o conjunto H dos quaterniões, munido da operação de adição e produto por um escalar, constitui um **espaço vectorial real**.

Aos quaterniões $\{1, i, j, k\}$ tais que:

$1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$ formam uma base do espaço vectorial H ,

a que se chama **base canónica** do espaço H . Neste caso qualquer elemento $q \in H$ pode ser escrito como combinação linear dos quaterniões de base, isto é, $q = a + ib + jc + kd$. E a

dimensão desse espaço é 4, isto é, o número máximo de elementos do espaço H linearmente independente.

Definição 2.9 (Produto interno dos quaterniões)

O **produto interno** de dois quaterniões é (equivalente a um produto interno de dois vectores 4-dimensionais) representado por $\langle q, p \rangle$ onde $p, q \in H$.

O produto interno dos quaterniões $q = a + ib + jc + kd$ e $p = e + if + jg + kh$ define-se por:

$$\langle q, p \rangle = \langle a + ib + jc + kd, e + if + jg + kh \rangle = ae + bf + cg + dh$$

Observação 2.3:

(a) $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$;

(b) $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$;

(c) Este produto é útil pois pode isolar um elemento de um quaternião. Por exemplo, o termo de i pode ser retirado de p : $\langle p, i \rangle = \langle a + ib + jc + kd, 0 + i + j0 + k0 \rangle = b$, da mesma forma $\langle p, j \rangle = c$, $\langle p, k \rangle = d$, $\langle p, 1 \rangle = a$;

(d) $\langle \alpha p, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle$, $p, q \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.10 (Produto externo dos quaterniões)

Seja $q = a + ib + jc + kd$, $p = e + if + jg + kh \in H$, $p, q \in H$. O **produto externo** dos quaterniões, conhecido também como o **produto ímpar** é representado por $p \times q$ e definido da seguinte maneira:

$$p \times q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & c & d \\ f & g & h \end{vmatrix} = i(ch - dg) + j(df - bh) + k(bg - cf)$$

O **produto externo** pode ser reescrito usando o produto de Grassmann: $p \times q = \frac{qp - pq}{2}$

Exemplo 2.3: Seja $x = 3 + i$ e $y = 5i + j - 2k$ dois números quaterniões.

Calcular $\langle x, y \rangle$ e $x \times y$?

$$\langle x, y \rangle = \langle 3 + i, 5i + j - 2k \rangle = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 0 + 5 + 0 + 0 = 5$$

$$x \times y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = i[0 \cdot (-2) - 0 \cdot 1] + j[0 \cdot 5 - 1 \cdot (-2)] + k[1 \cdot 1 - 0 \cdot 5] = 2j + k$$

O **produto de Grassmann** pode ser reescrito utilizando o produto interno e o produto externo de quaterniões de seguinte modo:

Dados dois quaterniões:

$$p = a + \vec{u} = a + ib + jc + kd \quad \text{e} \quad q = t + \vec{v} = t + ix + jy + kz$$

Onde \vec{u} representa o vector $ib + jc + kd$, e \vec{v} representa o vector $ix + jy + kz$.

Logo

$$pq = at - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + a\vec{v} + t\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{e} \quad qp = at - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + a\vec{v} + t\vec{u} - \vec{u} \times \vec{v}$$

De um modo idêntico se $p = (a, \vec{u})$, onde $\vec{u} = (b, c, d)$ e $q = (t, \vec{v})$, onde $\vec{v} = (x, y, z)$ então:

$$pq = \left(at - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, a\vec{v} + t\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} \right) \quad \text{e} \quad qp = \left(at - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, a\vec{v} + t\vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} \right)$$

Definição 2.11 (Conjugado de um número quaterniões)

O **conjugado de um número quaterniões** $q = a + ib + jc + kd$ é o quaterniões $\bar{q} \in H$ tal que:

$$\bar{q} = \text{conj}(q) = \text{conj}(a + ib + jc + kd) = a - ib - jc - kd.$$

Esta definição dá origem às seguintes propriedades, cujas demonstrações são imediatas:

Teorema 2.4. Sejam $p, q \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$(i) \quad \overline{\bar{q}} = q;$$

$$(ii) \quad \overline{pq} = \bar{q} \cdot \bar{p};$$

$$(iii) \quad \overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q};$$

$$(iv) \quad \overline{\alpha p} = \alpha \bar{p};$$

$$(v) \quad \text{Re}(q) = \frac{(q + \bar{q})}{2};$$

$$(vi) \quad \text{Im}(q) = \frac{(q - \bar{q})}{2};$$

$$(vii) \quad p\bar{q} + q\bar{p} = 2\text{Re}(p\bar{q}).$$

Demonstração:

Mostremos por exemplo a propriedade (vii) : $p\bar{q} + q\bar{p} = 2\text{Re}(p\bar{q})$

Seja $q = a + ib + jc + kd$ e $p = e + if + jg + kh$ então:

$$\bar{q}p = (a + ib + jc + kd)(e - if - jg - kh) = ae + bf + cg + dh + i(-af + be - ch + dg) + j(-ag + ce + bh - df) + k(-ah + de - bg + cf).$$

$$p\bar{q} = (e + if + jg + kh)(a - ib - jc - kd) = ea + fb + gc + hd + i(-eb + fa - gd + hc) + j(-ec + ga - hd + fd) + k(-ed + ha - fc + gb).$$

$$q\bar{p} + p\bar{q} = [ae + bf + cg + dh + i(-af + be - ch + dg) + j(-ag + ce + bh - df) + k(-ah + de - bg + cf)] + [ea + fb + gc + hd + i(-eb + fa - gd + hc) + j(-ec + ga - hd + fd) + k(-ed + ha - fc + gb)] =$$

$$= [ae + bf + cg + dh + i(-af + be - ch + dg) + j(-ag + ce + bh - df) + k(-ah + de - bg + cf)] +$$

$$+ [ea + fb + gc + hd - i(eb - fa + gd - hc) - j(ec - ga + hd - fd) - k(ed - ha + fc - gb)] =$$

$$= ae + bf + cg + dh + ea + fb + gc + hd = 2ae + 2bf + 2cg + 2dh = 2(ae + bf + cg + dh) =$$

$$= 2\text{Re}(p\bar{q}). \Leftrightarrow p\bar{q} + q\bar{p} = 2\text{Re}(p\bar{q}) \square$$

Definição 2.12 Dados $p, q \in H$, o **produto euclidiano** de p e q é o quaterniões $\bar{q}p$:

$\bar{p}q = (a - ib - jc - kd)(e + if + jg + kh)$ (Em que um dos factores é conjugado do outro quaterniões).

Observação 2.4:

(a) Devido à natureza não comutativa da multiplicação dos quaterniões temos, $\bar{p}q \neq \bar{q}p$;

(b) O produto interno pode ser escrito usando produto euclidiano de modo seguinte:

$$\langle p, q \rangle = \frac{\bar{p}q + \bar{q}p}{2}, \text{ onde } \bar{p} \text{ e } \bar{q} \text{ é o conjugado de } p \text{ e } q \text{ respectivamente com } p, q \in H.$$

Definição 2.13 (Norma de um número quaterniões)

O **valor absoluto, módulo ou norma** de um quaterniões $q \in H$ é um escalar que determina o **comprimento** do quaterniões da origem e é representado por $\|q\|$. Define-se por um número não

$$\text{negativo, } \|q\| = \|a + ib + jc + kd\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

O cálculo seguinte revela que: $\bar{q}q = qq = \langle q, q \rangle = \|q\|^2$, e portanto,

$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, Onde o radicando $\langle q, q \rangle$ representa o produto interno.

Teorema 2.5. Seja $p, q \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$(N_1) \|p\| \geq 0$ Com igualdade somente se $p = 0$;

$(N_2) \|\lambda p\| = |\lambda| \cdot \|p\|$;

$(N_3) \|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$ (Desigualdade triangular);

$(N_4) \|p \cdot q\| = \|p\| \cdot \|q\|$;

$(N_5) \|-q\| = \|q\|$.

Demonstração:

Mostremos (N_3) :

$$\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$$

Sendo $\|q\|^2 = q\bar{q}$ vem

$$\begin{aligned} \|p + q\|^2 &= (p + q)(\overline{p + q}) = (p + q)(\bar{p} + \bar{q}) = p\bar{p} + p\bar{q} + q\bar{p} + q\bar{q} = \\ &= \|p\|^2 + \|q\|^2 + p\bar{q} + q\bar{p} = \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2 \operatorname{Re}(p\bar{q}) \leq \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\bar{q}\| = (\|p\| + \|q\|)^2 \end{aligned}$$

Logo $\|p + q\|^2 \leq (\|p\| + \|q\|)^2 \Rightarrow \|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|$. Sabendo que $\operatorname{Re}(p) \leq \|p\|$ daí saiu que

$$\operatorname{Re}(p\bar{q}) \leq \|p\bar{q}\|. \square$$

Observação 2.5: Cada quaterniões corresponde um e um só ponto do espaço R^4 e, inversamente, cada ponto do espaço R^4 corresponde um e somente um quaterniões. Por causa disto, referimos ao quaterniões como ponto.

Usando a **função de distância** $d(p, q) = \|p - q\|$, $p, q \in H$, os quaterniões dão forma a um **espaço métrico** desde que são válidas as seguintes propriedades.

Propriedades da distância

$(d_1) d(p, q) \geq 0$;

$(d_2) d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$;

$$(d_3) \, d(p, q) = d(q, p);$$

$$(d_4) \, d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q.$$

Demonstração

Seja $p, q, r \in H$, mostremos a propriedade (d_2)

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$$

$$\begin{aligned} d(p, r) &= \|p - r\| = \|p - q + q - r\| = \|(p - q) + (q - r)\| \leq \|p - q\| + \|q - r\| = d(p, q) + d(q, r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r). \square \end{aligned}$$

Definição 2.14 (Inverso de um número quaternião)

Seja $q \in \overset{0}{H}$, então existe $q^{-1} \in \overset{0}{H}$ tal que $q q^{-1} = q^{-1} q = 1$ que é chamado **inverso do número quaternião** q , onde $\overset{0}{H}$ é conjunto dos quaterniões não nulos.

Podemos definir o **inverso do número quaternião**, tendo em conta o conceito da norma da seguinte forma:

$$\text{Sendo } \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\bar{q}q}{\|q\|^2} = (1, 0, 0, 0), \text{ temos: } q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2},$$

Observação 2.6: q^{-1} é único para $q \in \overset{0}{H}$.

A divisão de um quaternião por um escalar real corresponde à divisão por componente.

Observação 2.7: Não usamos a notação para a **divisão** $\frac{q_1}{q_2}$, onde $q_1 \in H$ e $q_2 \in \overset{0}{H}$, pois a

multiplicação dos quaterniões não é comutativa. Devemos distinguir $(q_2^{-1} \cdot q_1)$ e $(q_1 \cdot q_2^{-1})$.

Dada a não comutatividade do produto de quaterniões, a divisão de quaterniões define-se de dois modos. Usaremos o símbolo \backslash para denotar a **divisão à esquerda** e o símbolo $/$ para a **divisão à direita**. Assim, tem-se:

Sejam $p \in H$ e $q \in \overset{0}{H}$. A divisão de p por q define-se como:

$$\textbf{Divisão à esquerda: } p \backslash q = q^{-1} \cdot p$$

$$\textbf{Divisão à direita: } p / q = p \cdot q^{-1}$$

Observação 2.8:

(a) Se o quaterniões estiver a um comprimento de unidade (normalizado) então: $q^{-1} = \bar{q}$ ou $q\bar{q} = 1$.

(b) Se o quaterniões não estiver a um comprimento de unidade, podemos dividir o conjugado por um valor escalar que seja o quadrado do valor absoluto do quaterniões: $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ ou

$$(a + ib + jc + kd)^{-1} = \frac{(a - ib - jc - kd)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \text{ tendo em conta que } q = a + ib + jc + kd.$$

O conjunto dos números quaterniões é “**fechado**”, para as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão, isto é, a soma, produto, diferença e quociente de dois quaterniões é ainda um quaterniões.

Exemplo 2.4: Seja $x = 3 + i$ e $y = 5i + j - 2k$ dois números quaterniões:

Encontrar: (a) y^{-1} , (b) x/y e (c) $x \setminus y$.

Realmente,

$$(a) \quad y^{-1} = \frac{\bar{y}}{\|y\|^2} = \frac{-5i - j + 2k}{5^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{-5i - j + 2k}{25 + 1 + 4} = \frac{-5i - j + 2k}{30}.$$

$$(b) \quad x \setminus y = y^{-1}x = \left(\frac{-5i - j + 2k}{30} \right) \cdot (3 + i) = \frac{(-5i - j + 2k) \cdot (3 + i)}{30} = \frac{-15i - 3j + 6k + 5 - ji + 2ki}{30} = \frac{5 - 15i - j + 7k}{30}$$

$$(c) \quad x/y = xy^{-1} = (3 + i) \cdot \left(\frac{-5i - j + 2k}{30} \right) = \frac{(3 + i) \cdot (-5i - j + 2k)}{30} = \frac{-15i - 3j + 6k + 5 - ij + 2ik}{30} = \frac{5 - 15i - 5j + 5k}{30}$$

Exercícios propostos

2.7. Seja $q_1 = 3 - k + j$; $q_2 = -1 + k$; $q_3 = 3 - i$. Calcular:

$$a) \quad q_1 + q_2; \quad b) \quad q_2 / q_1; \quad c) \quad q_1 \setminus q_2.$$

2.8. Mostrar que:

$$a) \quad \overline{\bar{q}} = q; \quad b) \quad \overline{qp} = \bar{q}\bar{p}; \quad c) \quad \overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}; \quad d) \quad \overline{\alpha p} = \alpha \bar{p};$$

$$\text{e) } \operatorname{Re}(q) = \frac{(q + \bar{q})}{2}; \quad \text{f) } \operatorname{Im}(q) = \frac{(q - \bar{q})}{2}; \quad \text{g) } \|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|;$$

$$\text{h) } \|-q\| = \|q\|; \quad \text{i) } d(p, q) = d(q, p);$$

2.5. Representação trigonométrica dos quaterniões

Antes de mais, convém introduzir o argumento de um número quaternião.

Definição 2.15 (Argumento de um número quaternião)

O **argumento** de um número quaternião q é o ângulo que a recta Op ($O \rightarrow$ origem, $p \rightarrow$ ponto do espaço R^4) faz com o eixo positivo real e é representado por $\arg(q)$ tal que:

$$\arg(q) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(q)}{\|q\|}\right).$$

Onde $\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, é a norma do número quaternião $q = a + ib + jc + kd$.

Seja $q = a + ib + jc + kd$ um número quaternião com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $b = c = d = 0$ o número q se chama escalar e representa-se por $Sc(q)$.

Se $a = 0$ o número q se chama vector representa-se por $Vec(q)$.

Cada vector $q = ib + jc + kd$ pode ser representado num espaço 3-dimencional como um segmento orientado, cujas projecções nos eixos O_x , O_y , O_z são iguais, respectivamente, b, c, d , observa a figura (fig.2-1) a baixo.

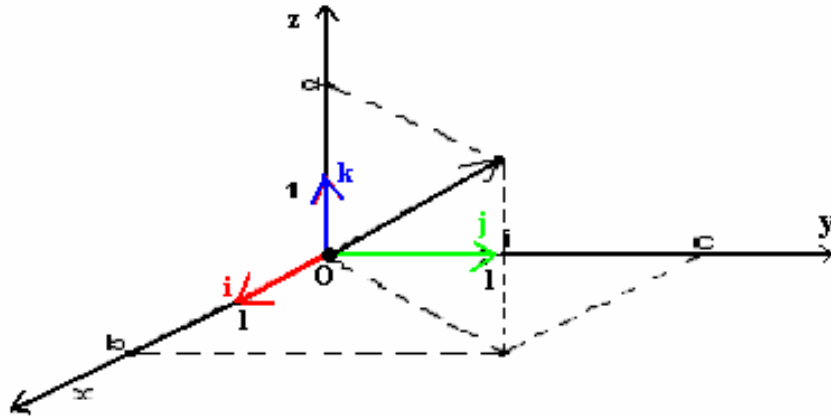


Fig.2.1

Cada quaternião $q = a + ib + jc + kd$ pode ser escrito como a soma de dois quaterniões: escalar a e vector $ib + jc + kd$, isto é, $q = Sc(q) + Vec(q)$, onde $Sc(q) = a$ - parte escalar de q , $Vec(q) = ib + jc + kd$ - parte vectorial de q . Seja $q = a + ib + jc + kd = Sc(q) + Vec(q)$.

Consideremos $Vec(q) = ib + jc + kd$ então $\|Vec(q)\| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$.

O “ort” (vector do comprimento 1) de $Vec(q) = ib + jc + kd$ designa-se por \vec{n} ($= \overrightarrow{ON}$).

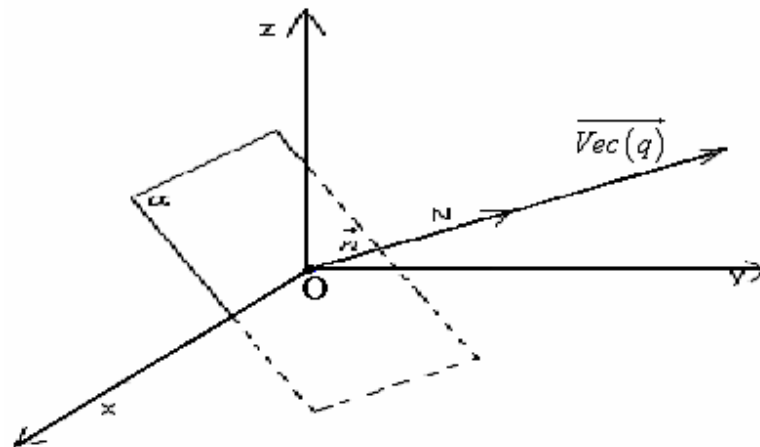


Fig. 2-2

Na fig.2-2 em cima temos $\overrightarrow{Vec(q)} = \|Vec(q)\| \vec{n}$.

O plano perpendicular a $Vec(q) = ib + jc + kd$ que passa pela origem das coordenadas designa-se por α (ver fig. 2-2). É claro que podemos encontrar um ângulo φ tal que:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{Sc(q)}{\sqrt{(Sc(q))^2 + (\|Vec(q)\|)^2}} = \frac{a}{\|q\|}, \text{ e } \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\overline{Vec(q)}}{\vec{n}\sqrt{(Sc(q))^2 + (\|Vec(q)\|)^2}} = \frac{\|Vec(q)\|}{\|q\|}, \text{ donde}$$

$$q = \|q\| \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \text{ ou } q = \|q\| \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i \left(b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) + j \left(c \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) + k \left(d \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \right]$$

Onde:

$\varphi \rightarrow$ Ângulo da rotação ou argumento do número quaternião.

$\vec{n}(b, c, d) \rightarrow$ Vector de unidade que representa a linha central de rotação ($\|\vec{n}\| = 1$).

$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, é a norma do número quaternião.

E a fórmula $q = \|q\| \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)$ – **forma trigonométrica de q** , onde $\|\vec{n}\| = 1$.

Se $\|q\| = 1$ a fórmula se reduz a $q = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ – **forma trigonométrica de q** .

Exemplo 2.5: Seja o número quaternião $q = 1 + i - j + k = 1 + \vec{n}$ onde $\vec{n} = i - j + k$ vamos Representá-lo na forma trigonométrica.

Na forma trigonométrica todos os quaterniões podem ser escrito como $q = \|q\| \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)$,

onde $\|\vec{n}\| = 1$ então calculemos: $\|q\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$,

$$\frac{\varphi}{2} = \arg(q) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(q)}{\|q\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$\vec{n} = \left(\frac{i - j + k}{\sqrt{3}} \right)$ (normalizado) fazendo substituição vem:

$$q = \|q\| \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right) + \left(\frac{i - j + k}{\sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \right) = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \left(\frac{i - j + k}{\sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

Exercícios:

2.9. Expressir cada um dos números quaterniões seguintes na forma algébrica:

a) $q_1 = 6 [\cos 0 + (1 + i) \sin 0]$;

b) $q_2 = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + (i + k) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$

Resolução

$$a) q_1 = 6[\cos 0 + (1 + i)\sin 0] = 6(1 + 0) = 6;$$

$$b) q_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + (i + k)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + (i + k)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + (i + k)\sqrt{2}$$

2.10. Expressir cada um dos números quaterniões seguintes na forma trigonométrica:

$$a) q_1 = 2 + 2\sqrt{3}i; \quad b) q_2 = 4 + 3j.$$

Resolução

Na forma trigonométrica todos os quaterniões podem ser escritos de modo seguinte:

$$q = \|q\|\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right], \text{ com } \|\vec{n}\| = 1.$$

$$a) \|q_1\| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$$\vec{n} = \frac{(2\sqrt{3}i + 0j + 0k)}{\|2\sqrt{3}i + 0j + 0k\|} = \frac{(2\sqrt{3}i + 0j + 0k)}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2}} = \frac{(2\sqrt{3}i + 0j + 0k)}{2\sqrt{3}} \text{ (onde } \vec{n} \text{ foi normalizado)}$$

$$\frac{t}{2} = \arg(q_1) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(q_1)}{\|q_1\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}$$

$$q_1 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{(2\sqrt{3}i + 0j + 0k)}{2\sqrt{3}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

$$b) \|q_2\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5, \quad \vec{n} = \frac{(0i + 3j + 0k)}{\|0i + 3j + 0k\|} = \frac{(0i + 3j + 0k)}{\sqrt{3^2}} = \frac{(0i + 3j + 0k)}{3}$$

$$\frac{t}{2} = \arg(q_2) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(q_2)}{\|q_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \cong 37^\circ \Leftrightarrow t \cong 74^\circ,$$

$$q_2 = 5\left[\cos(37^\circ) + \left(\frac{(0i + 3j + 0k)}{3}\right)\sin(37^\circ)\right] = 5[\cos(37^\circ) + j\sin(37^\circ)].$$

Exercícios propostos:

2.11. Expressir cada um dos números quaterniões seguintes na forma algébrica:

$$a) q = [\cos \pi + (1+i) \sin \pi]; \quad b) q = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + (i+k) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] \quad c) q = \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + (1+i) \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

2.12. Expressir cada um dos números quaterniões seguintes na forma trigonométrica:

$$a) \quad q_3 = -i; \quad b) \quad q_4 = j + k; \quad c) \quad q_5 = 3i$$

2.13. Mostre que, se $q = a + ib + jc + kd \in H$, então $q^2 - 2aq + \|q\|^2 = 0$.

Definição 2.16 (Igualdade dos números quaterniões na forma trigonométrica)

Dados dois números quaterniões q_1 e $q_2 \in H$ tais que:

$$q_1 = \|q_1\| \left[\cos \left(\frac{t}{2} \right) + i \left(x_1 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) + j \left(y_1 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) + k \left(z_1 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] e$$

$$q_2 = \|q_2\| \left[\cos \left(\frac{r}{2} \right) + i \left(x_2 \sin \left(\frac{r}{2} \right) \right) + j \left(y_2 \sin \left(\frac{r}{2} \right) \right) + k \left(z_2 \sin \left(\frac{r}{2} \right) \right) \right]$$

Com $r, t \rightarrow$ ângulos de rotação. $(x_l, y_l, z_l) \rightarrow$ vector que representa a linha central de rotação ($l = \overline{1, 2}$) diz-se que $q_2 = q_1$ sse

$$\begin{aligned} \|q_2\| &= \|q_1\| & x_2 \sin \left(\frac{r}{2} \right) &= x_1 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \\ \cos \left(\frac{r}{2} \right) &= \cos \left(\frac{t}{2} \right); & y_2 \sin \left(\frac{r}{2} \right) &= y_1 \sin \left(\frac{t}{2} \right); & e \quad z_2 \sin \left(\frac{r}{2} \right) &= z_1 \sin \left(\frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Teorema 2.6. Seja $q \in H$ representado por $q = \|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi)$ onde $\|\vec{n}\| = 1$.

Então para quaisquer quaterniões tem lugar a fórmula análoga de **De Moivre**:

$$q^k = \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^k = \|q\|^k (\cos k\varphi + \vec{n} \sin k\varphi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração

Vamos utilizar o princípio da indução finita.

Consideremos o resultado para $k = 1$ vem: $q^1 = \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^1 = \|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi)$ p.v.

Suponhamos que a fórmula é válida para $k = p$, isto é, tem lugar:

$$q^p = \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^p = \|q\|^p (\cos(p\varphi) + \vec{n} \sin(p\varphi))$$

E provemos a sua veracidade para $k = p + 1$, isto é, mostremos que se verifica:

$$q^{p+1} = \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^{p+1} = \|q\|^{p+1} (\cos(p+1)\varphi + \vec{n} \sin(p+1)\varphi)$$

Realmente:

$$\begin{aligned} q^{p+1} &= \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^{p+1} = \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^p \cdot \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right] = \\ &= \|q\|^p (\cos(p\varphi) + \vec{n} \sin(p\varphi)) \cdot \|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) = \\ &= \|q\|^{p+1} \left[(\cos(p\varphi) + \vec{n} \sin(p\varphi)) (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right] \\ &= \|q\|^{p+1} \left[\cos(p\varphi) \cos(\varphi) + \cos(p\varphi) \cdot \vec{n} \sin(\varphi) + \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \vec{n} \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \sin \varphi \right] = \\ &= \|q\|^{p+1} \left[\cos(p\varphi) \cos(\varphi) + \vec{n} \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \sin \varphi + \vec{n} \cdot \cos(p\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right] = \\ &= \|q\|^{p+1} \left[\cos(p\varphi) \cos(\varphi) + \vec{n} \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \sin \varphi + \vec{n} (\cos(p\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \sin(p\varphi) \cdot \cos(\varphi)) \right] = \\ &= \|q\|^{p+1} \left[\cos(p\varphi) \cos(\varphi) + \vec{n} \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \sin \varphi + \vec{n} \sin(p+1)\varphi \right] \end{aligned}$$

Se $\vec{n} \cdot \vec{n} = -1$ teremos o resultado pretendido.

Seja $\vec{n} = ib + jc + kd$, $\|\vec{n}\| = 1 \Leftrightarrow \|\vec{n}\|^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 + c^2 + d^2 = 1$ logo

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{n} &= (ib + jc + kd) \cdot (ib + jc + kd) = (-b^2 - c^2 - d^2) + i(cd - dc) + j(db - bd) + k(bc - cb) = \\ &= -(b^2 + c^2 + d^2) + i0 + j0 + k0 = -1 + i0 + j0 + k0 = (-1, 0, 0, 0), \text{ de facto, } \vec{n} \cdot \vec{n} = -1. \end{aligned}$$

Então temos

$$\begin{aligned} &\|q\|^{p+1} \left[\cos(p\varphi) \cos(\varphi) + \vec{n} \cdot \vec{n} \sin(p\varphi) \cdot \sin \varphi + \vec{n} \sin(p+1)\varphi \right] = \\ &= \|q\|^{p+1} \left[\cos(p\varphi) \cos(\varphi) - \sin(p\varphi) \cdot \sin \varphi + \vec{n} \sin(p+1)\varphi \right] = \\ &= \|q\|^{p+1} \left[\cos(p+1)\varphi + \vec{n} \sin(p+1)\varphi \right] \quad c.q.d \end{aligned}$$

Logo $q^k = \left[\|q\| (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \right]^k = \|q\|^k (\cos k\varphi + \vec{n} \sin k\varphi)$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. \square

Corolário 2.6.1. Se $\|q\| = 1$ a fórmula se reduz a $q^k = (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + \vec{n} \sin k\varphi$.

Lema 2.3. Seja $p \in H$, então, $\|p\| = \|\bar{p}\|$.

Demonstração:

Seja $p = a + ib + jc + kd$ então $\bar{p} = a - ib - jc - kd$, daí vem:

$$\|\bar{p}\| = \|a - ib - jc - kd\| = \sqrt{a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \|p\|. \square$$

Definição 2.17 (Quaterniões unitários)

Um quaterniões diz-se unitário se $\|q\| = 1$, representa-se por H_1 . Em outras palavras todos os quaterniões encontram-se em uma unidade, esférica, quatro dimensional, ou seja, um quaterniões unitário tem a seguinte propriedade: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$

Observação 2.9: Para **normalizar** um número quaterniões q , fazemos:

$$q' = \frac{q}{\|q\|} = \frac{a + ib + jc + kd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} + \frac{ib}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} + \frac{jc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} + \frac{kd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

este fará $\|q'\| = 1$. Com efeito

$$\begin{aligned} \|q'\| &= \left\| \frac{q}{\|q\|} \right\| = \left\| \frac{a + ib + jc + kd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \right\| = \left\| \frac{a + ib + jc + kd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \right\| = \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right)^2} + \frac{b^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right)^2} + \frac{c^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right)^2} + \frac{d^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Por outro lado temos } \|q'\| = \left\| \frac{q}{\|q\|} \right\| = \frac{\|q\|}{\|q\|} = 1.$$

A especificidade de quaterniões unitários consiste em utilizá-los na representação de rotação no espaço 3D.

Se q for normalizado então $\frac{1}{q} = \bar{q}$ o que faz a divisão muito mais fácil. Isto é equivalente a uma equação similar para matrizes ortogonais, que não esteja surpreendente, desde que os quaterniões normalizados e as matrizes ortogonais, ambos são usados para representar rotações.

Com efeito se $q = a + ib + jc + kd$ então $\bar{q} = a - ib - jc - kd$

$$\begin{aligned} \text{Logo } q\bar{q} &= (a + ib + jc + kd)(a - ib - jc - kd) = \\ &= aa + bb + cc + dd + i(ba + dc - ab - cd) + j(-ac + ca - bd + db) + k(-ad - bc + cb + da) = \\ &= aa + bb + cc + dd + i0 + j0 + k0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (\text{se normalizado}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow q\bar{p} = 1 \text{ dai } \frac{1}{q} = \bar{q}.$$

Teorema 2.7. Sejam $p, q \in \mathbb{H}^0$ e $p_1, q_1 \in H_1$. Então, são válidas as seguintes propriedades:

- (i) $(p^{-1})^{-1} = p$;
- (ii) $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$;
- (iii) $\|p_1q_1\| = 1$;
- (iv) $p_1^{-1} = \overline{p_1}$.

Demonstração:

Mostremos os itens (i) e (iii), deixando os outros ao cargo do leitor

$$(i) \text{ Pela definição temos } p^{-1} = \frac{\bar{p}}{\|p\|^2} \text{ então } (p^{-1})^{-1} = \left(\frac{\bar{p}}{\|p\|^2} \right)^{-1} = \frac{\|p\|^2}{\bar{p}} = \frac{p\bar{p}}{\bar{p}} = p. \square$$

(iii) como p_1 e $q_1 \in H_1$ então as suas normas é igual a unidade logo vem:

$$\|p_1q_1\| = \|p_1\| \cdot \|q_1\| = 1 \cdot 1 = 1. \square$$

Exercícios:

2.14. Provar que são verdadeiras as igualdades:

$$a) \cos 5\theta = 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta;$$

$$b) \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 16\cos^4 \theta - 12\cos^2 \theta + 1 \text{ se } \theta \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Resolução

Utilizemos a fórmula binomial

$$(u + v)^k = u^k \cdot v^0 + n \cdot u^{(k-1)} \cdot v + C_2^k \cdot u^{(k-2)} \cdot v^2 + \dots + C_r^k \cdot u^{k-r} \cdot v^r + \dots + k \cdot u \cdot v^{(k-1)} + u^0 \cdot v^k$$

Onde os coeficientes

$$C_r^k = \frac{k!}{r!(k-r)!}, \text{ também denotados por } \binom{k}{r}, \text{ são chamados coeficientes binomiais, onde}$$

$$k! = 1.2.3.4.5 \dots k \quad e \quad 0! = 1.$$

Segundo a fórmula de Newton e de De Moivre, temos:

Representamos um quaternião como segue: $q = \cos 5\theta + \vec{n} \sin 5\theta$, onde $\|\vec{n}\| = 1$ e como $\|q\| = 1$ teremos

$$\begin{aligned} \cos 5\theta + \vec{n} \sin 5\theta &= (\cos \theta + \vec{n} \sin \theta)^5 = \\ &= \cos^5 \theta + \binom{5}{1} \cos^4 \theta (\vec{n} \sin \theta) + \binom{5}{2} \cos^3 \theta (\vec{n} \sin \theta)^2 + \binom{5}{3} \cos^2 \theta (\vec{n} \sin \theta)^3 + \binom{5}{4} \cos \theta (\vec{n} \sin \theta)^4 + (\vec{n} \sin \theta)^5 = \\ &= \cos^5 \theta + 5\vec{n} \cos^4 \theta \sin \theta - 10\cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10\vec{n} \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5\cos \theta \sin^4 \theta + \vec{n} \sin^5 \theta = \\ &= \cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5\cos \theta \sin^4 \theta + \vec{n} (5\cos^4 \theta \sin \theta - 10\cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta) \\ \Leftrightarrow \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5\cos \theta \sin^4 \theta \quad e \quad \sin 5\theta = 5\cos^4 \theta \sin \theta - 10\cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5\cos \theta \sin^4 \theta = \cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 = \\ &= \cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 10\cos^5 \theta + 5\cos \theta [1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta] = \\ &= \cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 10\cos^5 \theta + 5\cos \theta - 10\cos^3 \theta + 5\cos^5 \theta = \\ &= 5\cos \theta - 20\cos^3 \theta + 16\cos^5 \theta \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin 5\theta = 5\cos^4 \theta \sin \theta - 10\cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} &= \frac{5\cos^4 \theta \sin \theta - 10\cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta (5\cos^4 \theta - 10\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta)}{\sin \theta} = 5\cos^4 \theta - 10\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \\ &= 5\cos^4 \theta - 10\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2 = 5\cos^4 \theta - 10\cos^2 \theta + 10\cos^4 \theta + 1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 16\cos^4 \theta - 12\cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

2.15. Sabendo que os números 17 e 47 é possível representar sob a forma da soma de quatro quadrados perfeitos (quadrado dos números inteiros): $17 = 4^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, $47 = 6^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$.
Demonstrar que o seu produto 799 é possível representar sob a forma da soma de quatro quadrados perfeitos.

Resolução

Utilizando quaterniões podemos escrever $17 = \|4 + i\|^2$ e $47 = \|6 + 3i + j + k\|^2$. Logo

$$799 = 17 \cdot 47 = \|4 + i\|^2 \cdot \|6 + 3i + j + k\|^2 = \|(4 + i) \cdot (6 + 3i + j + k)\|^2 = \|21 + 18i + 3j + 5k\|^2,$$

Portanto, $799 = 21^2 + 18^2 + 3^2 + 5^2$.

2.16. Dados os números inteiros N_1, N_2, \dots, N_m que se representam sob a forma da soma de quatro quadrados perfeitos, verificar se o produto $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_m$ é representável ou não sob a forma da soma de quatro quadrados perfeitos?

Resolução

Sejam

$$N_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$$

$$N_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2$$

$$N_m = a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2, \quad \text{com } a_l, b_l, c_l, d_l \in \mathbb{Z} \ (l = 1, 2, 3, \dots, m)$$

Cada um dos números dados pode ser considerado como o quadrado do módulo de um número quaternião:

$$N_1 = \|q_1\|^2 \quad \text{onde} \quad q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k,$$

$$N_2 = \|q_2\|^2 \quad \text{onde} \quad q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k,$$

$$N_m = \|q_m\|^2 \quad \text{onde} \quad q_m = a_m + b_m i + c_m j + d_m k,$$

Então $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_m = \|q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m\|^2 = \|q\|^2$, onde $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$.

Sendo que multiplicando alguns quaterniões, realizam-se as operações de adição, subtração e multiplicação sob suas componentes podemos representar o quaternião q sob a forma.

$$q = Q = A + Bi + Cj + Dk, \quad \text{com} \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z} \text{ mas então,}$$

$N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, isto é, o produto $N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_m = N$, é possível representar sob a forma da soma de quatro quadrados perfeitos.

Tendo em conta os exercícios 2.15) e 2.16) podemos enunciar o seguinte teorema denominado por **teorema de Lagrange**.

Teorema (Lagrange) 2.8. Cada numero natural n (primo ou composto) é possível representar sob a forma de soma de quatro quadrados perfeitos, $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ com $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Seja n um número natural:

I- se n é primo então: $n = n_1 \cdot 1$

Os números n_1 e 1 pode ser escrito sob a forma de soma de quatro quadrados perfeitos, ou seja,

$$n_1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2.$$

Representemos os números n_1 e 1 utilizando quaterniões temos:

$$n_1 = \|x + yi + zj + tk\|^2 \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 1 = \|1 + 0i + 0j + 0k\|^2 \quad \text{logo o produto } n_1 \cdot 1 \text{ será}$$

$$\begin{aligned} n_1 \cdot 1 &= \|x + yi + zj + tk\|^2 \cdot \|1 + 0i + 0j + 0k\|^2 = \|(x + yi + zj + tk) \cdot (1 + 0i + 0j + 0k)\|^2 = \\ &= \|x + yi + zj + tk\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \end{aligned}$$

mas $n_1 \cdot 1 = n$ então $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ logo qualquer número natural primo é possível representar sob a forma de soma de quatro quadrados perfeitos.

II- Se n é composto então $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_p$ onde $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ são números naturais primos.

Por **I** temos:

$$n_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2, \quad n_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2, \quad n_3 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + t_3^2, \dots, n_p = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + t_p^2$$

$$x_l, y_l, z_l, t_l \in \mathbb{Z} \quad (l = 1, 2, 3, \dots, p)$$

Podemos representar esses números primos utilizando quaterniões da seguinte forma:

$$n_1 = \|x_1 + y_1i + z_1j + t_1k\|^2, \quad n_2 = \|x_2 + y_2i + z_2j + t_2k\|^2, \quad n_3 = \|x_3 + y_3i + z_3j + t_3k\|^2, \dots, n_p = \|x_p + y_pi + z_pj + t_pk\|^2$$

$$x_l, y_l, z_l, t_l \in \mathbb{Z} \quad (l=1, 2, 3, \dots, p)$$

Então o produto

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_p =$$

$$= \|x_1 + y_1i + z_1j + t_1k\|^2 \cdot \|x_2 + y_2i + z_2j + t_2k\|^2 \cdot \|x_3 + y_3i + z_3j + t_3k\|^2 \cdot \dots \cdot \|x_p + y_pi + z_pj + t_pk\|^2 =$$

$$= \left\| (x_1 + y_1i + z_1j + t_1k) \cdot (x_2 + y_2i + z_2j + t_2k) \cdot (x_3 + y_3i + z_3j + t_3k) \cdot \dots \cdot (x_p + y_pi + z_pj + t_pk) \right\|^2$$

Como o produto dos quaterniões é ainda um quaternião então teremos:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_p = \|x + yi + zj + tk\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \Leftrightarrow n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

Logo qualquer número natural n pode ser representado na forma de soma de quatro quadrados perfeitos. \square

III-APLICAÇÃO DOS QUATERNIÕES

Os quaterniões são aplicados em diversas áreas nomeadamente:

- ✓ **Computação Gráfica e Animação Tridimensional;**
- ✓ **Representações de rotações no espaço;**
- ✓ **Á Astronomia;**
- ✓ **Teoria dos números;**
- ✓ **Mecânica de construção;**
- ✓ **Sistema de equações lineares com “muitas” incógnitas;**
- ✓ **Mecânica quântica (trabalhos de Geizenberg (1901-1976));**
- ✓ **Aeronáutica;**
- ✓ **Teoria de relativismo.**

Mas neste trabalho debruçemos sobre o segundo ponto.

Antes de mais, tentemos fazer uma breve análise sobre a rotação no plano.

3.1. Rotações em 2D e números complexos

Sob vários aspectos, os quaterniões podem ser encarados como uma generalização, no espaço tridimensional, do que os números complexos representam para o espaço bidimensional. Portanto, começaremos por relembrar algumas características dos números complexos.

Um número complexo é definido através de dois parâmetros, números reais usualmente chamados de a e b . A unidade dos números imaginários, ou seja, o número complexo $(0,1)$, é normalmente chamada de i . Portanto, outra forma de representar um número complexo é da forma

$$z = a + ib \quad (5)$$

Uma outra forma de representação, que será importante ao operarmos com rotações, é a forma polar, na qual um vector é descrito através de sua norma (comprimento cartesiano) e de seu deslocamento angular (rotação anti-horária em torno da origem a partir do eixo dos x).

Em resumo, podemos pensar em um número complexo como uma soma algébrica de um número real com um número imaginário, na forma $a + ib$, como um vector cartesiano (a, b) ou como um vector polar (r, θ) .

A soma de dois números complexos é dada por:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \quad (6)$$

Isto é exactamente o mesmo que dizer que

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad (7)$$

Já a multiplicação, porém, tem a seguinte propriedade:

Em coordenadas polares, resulta simplesmente que:

$$(r_1, \theta_1)(r_2, \theta_2) = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2) \quad (8)$$

A propriedade dos deslocamentos angulares se somarem significa que podemos pensar na multiplicação entre dois complexos como uma operação de rotação. No caso de um complexo com norma unitária, teremos a representação de uma rotação pura, que numa operação de multiplicação alterará apenas a orientação do vector sem modificar a sua norma. Em particular, o imaginário puro i , que corresponde ao vector polar $(1, 90)$, representará sempre uma rotação anti-horária de 90° em torno da origem.

Examinemos um exemplo concreto. Se multiplicamos o vector cartesiano $(1, 1)$, que corresponde ao vector polar $(\sqrt{2}, 45)$, pelo vector cartesiano $(0, 1)$, que corresponde ao vector polar $(1, 90)$, obteremos, o vector polar $(\sqrt{2}, 45)(1, 90) = (\sqrt{2}, 45 + 90) = (\sqrt{2}, 135)$, que

corresponde ao vector cartesiano $(-1,1)$. Este resultado pode ser interpretado tanto como o vector cartesiano $(1,1)$ rotacionado de 90° no sentido anti-horário quanto como o vector $(0,1)$ escalado por um factor de $\sqrt{2}$ e rotacionado de 45° no sentido anti-horário (ver fig.3-1).

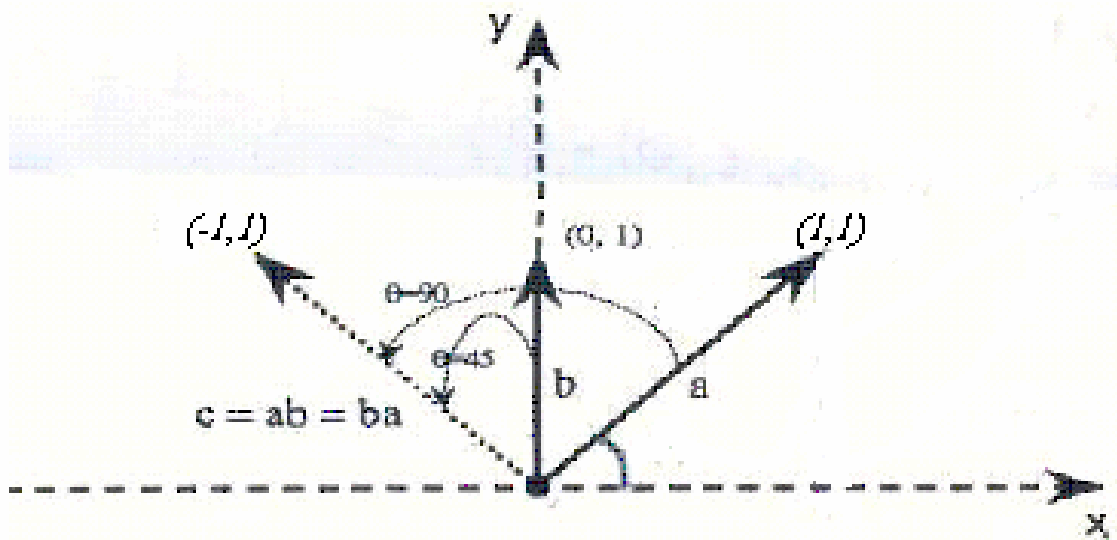


Fig.3-1: Rotação com complexos

De facto, é fácil verificar que, tanto a multiplicação de normas quanto a soma de ângulos de rotação plana é comutativa. Logo a multiplicação de números complexos é, consequentemente, sempre comutativa, como podemos observar no exemplo acima.

Como realizar tais operações de forma algébrica, operando directamente sobre as coordenadas cartesianas?

Se realizarmos a multiplicação entre dois complexos da forma algébrica usual, obteremos que

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + b_1b_2i^2 = a_1a_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2) + i^2b_1b_2 \quad (9)$$

Tendo em conta que $i^2 = -1$ podemos agora escrever a expressão final para a multiplicação:

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2) \quad (10)$$

Com estas definições para as operações envolvendo números complexos, podemos representar e operar sobre orientações e rotações bidimensionais de forma prática e automática.

3.2. Representações de rotações no espaço 3D

De entre os métodos que os autores referem para a representação de rotações de um corpo rígido em torno de um ponto fixo no espaço, iremos referir-nos a três deles:

1. As matrizes ortogonais reais de ordem 3;
2. As matrizes especiais unitárias de ordem 2;
3. Os **quaterniões**.

Dando ênfase a este último, procuraremos destacar as suas vantagens quando comparado com os restantes métodos, nomeadamente, a sua simplicidade, economia e fácil visualização. Por outro lado, referiremos a sua utilidade na representação de composição de rotações.

✓ Isomorfismo entre os números quaterniões e matrizes

Se a cada quaternião $q = a + ib + jc + kd$ pôr em correspondência a matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{bmatrix}$$

então se obtém um isomorfismo. O determinante dessa matriz é

$$\begin{vmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

o que é igual ao quadrado da norma do quaternião $q = a + ib + jc + kd$.

É possível, também, construir um sistema de matrizes com elementos reais (\mathbb{R}) isomorfo ao sistema de quaterniões. Para isso basta associar a cada quaternião $a + ib + jc + kd$ uma matriz da forma

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \quad (11)$$

A correspondência $\varphi : H \rightarrow M_4$, sobre \mathbb{R} , é biunívoca e preserva as operações algébricas nas estruturas consideradas, ou seja:

(i) $\varphi : H \rightarrow M_4$, sobre \mathbb{R} , é biunívoca;

$$(ii) - \varphi(q_1 q_2) = A_1 \cdot A_2, \text{ com } A_1, A_2 \in M_4 \text{ e } q_1, q_2 \in H$$

$$- \varphi(q_1 + q_2) = A_1 + A_2.$$

Considerando H e M_4 como espaços vectoriais sobre, \mathbb{R} .

Verificando as operações de adição e de multiplicação sobre duas matrizes da forma (11), facilmente, chega-se a conclusão que a álgebra das matrizes da forma (11) é isomorfa à álgebra dos quaterniões, isto é, a adição e multiplicação de quaterniões corresponde à adição e multiplicação de matriz. Convém representar a matriz (11) sob a forma: $M = a.1 + bi + cj + dk$, onde $1, i, j, k$ são matrizes da forma:

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e $ij = k; \quad ji = -k; \quad jk = i; \quad kj = -i; \quad ki = j; \quad ik = -j$.

✓ Rotações no espaço tridimensional

Lembremos alguns factos conhecidos.

(i) Rotação em torno da linha central z em ângulo θ é dada pela matriz: $R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 3.1: Escolhendo o valor do ângulo $\theta=90^\circ$ teremos: $R_z(90) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) Analogamente com rotação sobre a linha central y é: $R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

Exemplo 3.2: Escolhendo o valor do ângulo $\theta = 90^\circ$ teremos $R_y(90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) Também rotação sobre a linha central x é dada pela matriz: $R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Exemplo 3.3: Escolhendo o valor do ângulo $\theta = 90^\circ$ teremos $R_x(90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rotações Sucessivas: A ordem de rotações sucessivas é significativa, por exemplo.

1. Girando 90° sobre a linha central x ;
2. Girando 90° sobre a linha central y ;
3. Girando -90° sobre a linha central x .

Isto dá uma rotação de 90° sobre a linha central z . Visto que:

1. Girando 90° sobre a linha central x ;
2. Girando -90° sobre a linha central x ;
3. Girando 90° sobre a linha central y .

Isto dá uma rotação de 90° sobre a linha central y (as primeiras duas linhas cancelam).

As rotações sucessivas podem ser calculadas multiplicando junto as matrizes que representam as rotações individuais. Da mesma maneira que a ordem das rotações é importante, a ordem da multiplicação da matriz é importante.

No primeiro exemplo as 3 rotações seriam representadas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No segundo caso as rotações são representadas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que de facto é uma rotação de 90° sobre a linha central y como já tínhamos dito antes.

No espaço tridimensional, um ponto de coordenadas (x, y, z) pode ser girado em torno de um dos eixos coordenados bastando para isso que ele seja multiplicado por uma matriz de rotação. As matrizes de rotação em um ângulo θ em torno dos eixos x , y e z , respectivamente, são dadas por $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ e $R_z(\theta)$ dados acima.

Quando desejamos modelar um objecto (seja ela um corpo rígido, uma partícula, um raio de luz, etc. ...) precisamos, em muitas circunstâncias, especificar a sua posição e orientação em nosso universo virtual.

A especificação de posições, usualmente dadas como translações com relação a uma origem conhecida, não apresenta grandes problemas. Grande parte das vezes podemos até mesmo simplesmente especificar a posição em coordenadas cartesianas e a questão está resolvida.

Já quanto às orientações, usualmente dadas como **rotações** com relação a uma origem inicial, não é assim tão simples. À primeira vista, especialmente aos iniciantes na área, pode parecer que não haja qualquer dificuldade. Afinal, assim como no caso da posição, temos três graus de liberdade, e portanto bastariam três parâmetros para definir a orientação de um objecto.

Neste trabalho, procuraremos apresentar as dificuldades envolvidas em representar rotações e mostraremos que uma das soluções para este problema é a utilização de quatro parâmetros que determinam objectos matemáticos chamados **quaterniões**.

3.2.1. Ângulos de Euler

A solução imediata para o problema de especificar a orientação de um objecto no espaço tridimensional é fornecer suas rotações com relação aos eixos x , y , e z . Inicialmente, parece que isso resolve toda a questão. Porém, há algumas dúvidas a esclarecer.

A parametrização proposta aqui é a seguinte: para especificar a orientação de um objecto, forneceremos três parâmetros, que representam os ângulos de rotação anti-horária em relação a cada um dos três eixos coordenados. Esses ângulos são chamados de **ângulos de Euler**. Será que com isso o problema não está resolvido?

A resposta, um pouco surpreendente quando começamos a estudar o assunto, é que para muitas aplicações, esta representação é extremamente problemática.

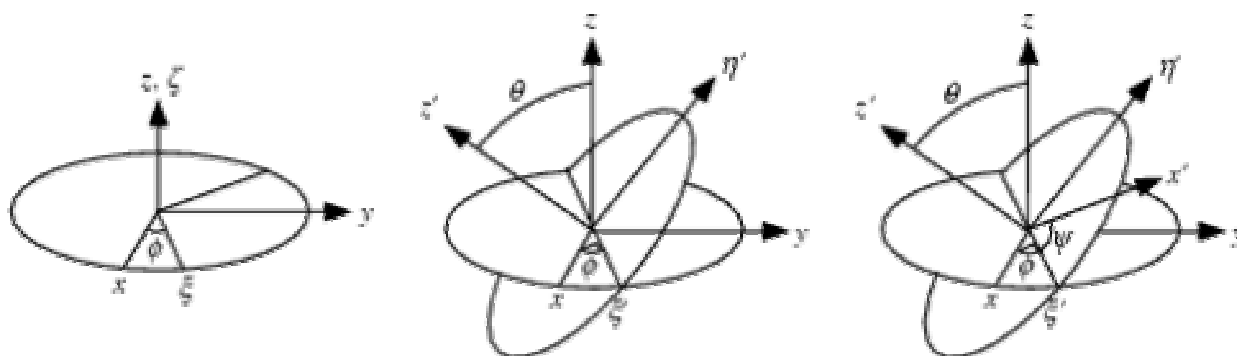


Fig.3-2: Ângulos de Euler

3.2.1.1. Especificidade de rotações tridimensionais

A primeira dificuldade está no facto de que operações de rotação, ao contrário das de translação, são **não comutativas**. Ou seja, podemos representar a posição de um objecto como a soma dos deslocamentos paralelos a cada um dos eixos coordenados e ao final, não importando a ordem em que aplicarmos os três deslocamentos, terminaremos na mesma posição. Já com as rotações, isso não acontece. Se temos uma rotação em torno do eixo x e outra em torno do eixo y , e as aplicarmos a um objecto considerado, obteremos orientações finais diferentes dependendo da ordem em que as rotações forem aplicadas.

Caso o leitor nunca tenha se dado conta do facto que acabamos de enunciar, é importante que pare alguns momentos para compreender o significado do que foi afirmado. Descreveremos abaixo uma situação em que isso acontece.

Imagine o leitor que esteja no comando de um avião que voa em linha recta para a frente, indo para o norte, com a asa direita apontando para o leste e a esquerda para o oeste.

Imagine então que o leitor gire o avião 90° para a esquerda (isto é, uma rotação anti-horária em torno do eixo vertical), voando agora portanto para o oeste. Em seguida, imaginemos que o leitor continue a voar para o oeste mas incline o avião de forma a baixar sua asa direita e erguer a esquerda 90° (isto é, uma rotação anti-horária em torno do eixo leste/oeste). No final, teremos o

avião voando para o oeste, com a asa direita apontando para o solo e a esquerda para o céu (ver fig.3-3).



Fig.3-3

Verifiquemos agora o que ocorre se executarmos exactamente as mesmas duas rotações, porém na ordem inversa. Começando com o avião voando para o norte, se executarmos a rotação anti-horária de 90° em torno do eixo leste/oeste, o avião passará a voar na vertical, com a cabine voltada para o solo, com a cauda apontando para o céu e a barriga para o sul. A asa direita continuará apontando para o leste e a esquerda para o oeste. Se agora executarmos a rotação anti-horária de 90° em torno do eixo vertical, teremos o avião ainda voando para baixo, mas com a asa direita apontando para o norte, a esquerda para o sul e a barriga voltada para o leste (ver fig.3-4).

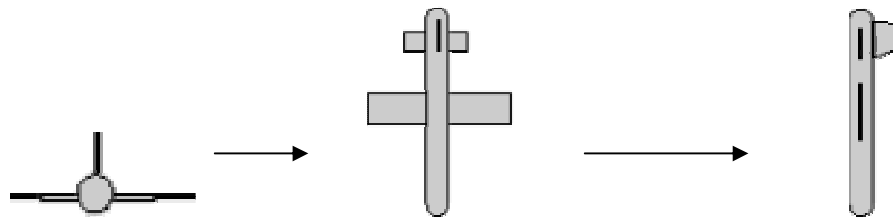


Fig.3-4

Portanto, como se pode ver no exemplo acima, a ordem em que executamos as rotações pode alterar completamente a orientação final obtida. Isso significa que para descrever a orientação de um objecto, não é suficiente fornecer os ângulos de rotação em torno dos eixos coordenados; é preciso também especificar a ordem em que essas rotações devem ser executadas.

Por exemplo, para especificar a orientação de um objecto, fornecemos os ângulos de rotação em torno dos eixos coordenados e estabelecemos a ordem de execução de rotações: primeiro em torno de x , em seguida em torno de y e finalmente em torno de z , necessariamente nesta ordem.

3.2.1.2. Representação de orientações fixas

Descrevemos o movimento do avião, acima considerado tendo em conta a observação feita.

Para isso fixarmos a ordem das rotações como sendo sucessivamente em torno dos eixos sul/norte, leste/oeste e baixo/cima. (A discussão seria exactamente a mesma se tivéssemos chamado nossos eixos de x , y e z . Analogamente pode-se pensar, nos exemplos que se seguem, no eixo sul/norte como sendo o eixo x , no leste/oeste como y e no baixo/cima como z).

Neste sistema de representação, para especificar a orientação inicial “voando para o norte com a asa direita apontando para o leste” forneceríamos três ângulos: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0)$. Essa seria a “origem” do nosso sistema de representação de orientações, assim como o ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ seria a origem de um sistema de representação de posições.

Para especificar a orientação obtida ao final da primeira parte do exemplo considerado, ou seja, voando para o oeste com a asa direita apontando para o solo, não poderíamos usar os ângulos do exemplo, pois nele executamos primeiro a rotação em torno do eixo vertical e em seguida a rotação em torno do eixo leste/oeste, contrariando a ordem que escolhemos. Porém, se primeiro inclinarmos o avião para a direita (rotação em torno do eixo sul/norte) para então apontá-lo para o oeste (rotação em torno do eixo vertical) obteremos o mesmo resultado. Portanto, para representar essa orientação usando a ordem que escolhemos, forneceríamos os ângulos $(90, 0, 90)$. O leitor deve verificar que esta sequência de rotações efectivamente gera a mesma orientação final que a obtida antes.

Finalmente, para especificar a orientação obtida ao final da segunda parte do exemplo considerado, isto é, voando para baixo com a asa direita apontando para o norte, não há qualquer dificuldade, pois as rotações já estão na ordem correcta, e simplesmente usaríamos os ângulos $(0, 90, 90)$.

Por enquanto, parece que tudo vai muito bem, e de facto podemos, sem grandes dificuldades, representar qualquer orientação fixa utilizando este sistema. Se fosse este nosso único objectivo, nosso problema provavelmente estaria resolvido de forma satisfatória.

3.2.1.3. Representação de orientações mutáveis

Em muitas situações, porém, desejamos representar orientações que estão continuamente sofrendo pequenas alterações. Ao animarmos o movimento de um avião, por exemplo,

normalmente não desejamos saltar repentinamente entre orientações fixas predeterminadas e sim alterar pouco a pouco a orientação do avião, seja devido a uma pequena correcção da rota, seja para executar de forma suave uma grande correcção da rota.

Neste contexto, a utilização de *ângulos de Euler* apresenta algumas dificuldades, que examinaremos a seguir:

1. Gimbal lock

Gimbal lock é o nome dado a um fenómeno não muito intuitivo (mas muito real) com o qual se defrontam animadores que representam a orientação dos objectos em seu universo virtual utilizando ângulos de Euler.

Ao invés de descrever o problema conceptualmente, comecemos por mostrar que ele existe através de um exemplo.

Imaginemos que estamos modelando um avião voando inicialmente para o norte, com a asa direita voltada para o leste. Suponhamos que o piloto comece a baixar o nariz do avião aos poucos. Em nossa representação, isso significará uma rotação anti-horária em torno do eixo leste/oeste, ou seja, o ângulo correspondente começará a crescer. Se o piloto baixar o nariz do avião até que esteja voando directamente de encontro ao solo, ele terá executado uma rotação de 90° , e portanto sua orientação neste momento será representada por $(0, 90, 0)$ e a barriga do avião estará voltada para o sul. Suponhamos agora que o piloto decida executar um parafuso, ou seja, girar o avião em torno de seu eixo longitudinal. Como o avião está indo para baixo, isso significa girar em torno do eixo vertical, ou seja, se ele girar no sentido anti-horário, a asa esquerda girará para o sul e a direita para o norte. Para que esta rotação ocorra suavemente, o ângulo de rotação vertical terá que aumentar aos poucos, até completar a rotação total pretendida. Até aqui, não temos qualquer problema: após uma rotação de 90° , o avião estará na orientação $(0, 90, 90)$, com a barriga para o leste, após 180° em $(0, 90, 180)$, com a barriga para o norte e, finalmente, após uma volta completa, terá voltado a $(0, 90, 0)$, com a barriga novamente voltada para o sul.

Digamos, porém, que uma vez indo para baixo, com a barriga para o sul, o piloto decida, ao invés de executar um parafuso, girar o avião para a sua esquerda, apontando a asa esquerda para o céu, ou seja, uma rotação anti-horária em torno do eixo sul/norte.

Como executar esta rotação de forma suave, incremental?

Inicialmente, parece razoável supor que basta incrementar aos poucos o ângulo correspondente à rotação sul/norte. Só que isso não funciona, pois a rotação em torno do eixo sul/norte é, em nossa convenção, executada antes da rotação em torno do eixo leste/oeste. Surpreendentemente, se incrementarmos a rotação sul/norte também executaremos um parafuso. O leitor deve verificar que é realmente esse o caso.

O facto é que, enquanto mantivermos a rotação de 90° ao redor do eixo leste/oeste, não há qualquer mudança nos outros eixos que possa nos levar a alterações na orientação em torno do eixo sul/norte. Isso não significa que a nova posição desejada não tenha representação através de nenhuma combinação de ângulos de Euler; porém, enquanto o ângulo de rotação leste/oeste permanecer em 90° , efectivamente perdemos um grau de liberdade⁽¹⁾ de movimento e há orientações que nunca poderemos atingir. Essa é a situação chamada de **gimbal lock**.

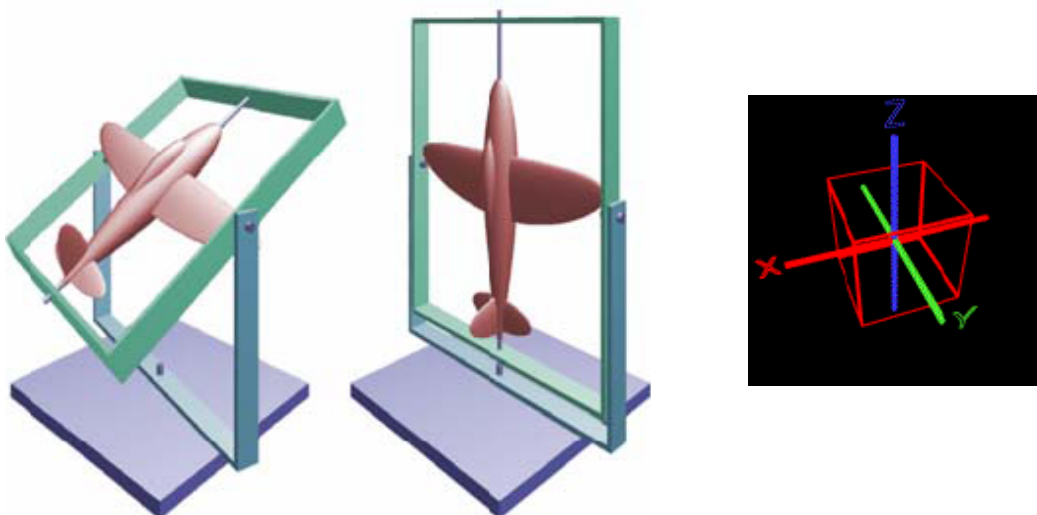


Fig.3.5: Fenómeno de “Gimbal lock”

1.1. Evitando o Gimbal lock

Ou seja, uma vez que tenhamos nosso objecto em uma determinada orientação, se desejamos girá-la um pouco mais, mesmo que seja em torno de um dos três eixos coordenados e não de um eixo arbitrário, não basta simplesmente incrementar um pouco a rotação do eixo correspondente, pois queremos executar a nova rotação após as rotações que já foram previamente executadas.

Levando isso em conta, uma solução seria simplesmente guardar uma lista de todas as rotações executadas sobre o objecto, na exacta ordem em que foram executadas. Porém, isso

⁽¹⁾ **Grau de liberdade** na estatística é definido como número de espaço entre os dados, mas neste caso está a se referir ao número de espaços necessários para efectuar a rotação de um objecto.

significaria guardar uma quantidade, cada vez maior, de dados e repetir toda a história de rotações cada vez que quiséssemos orientar a entidade. Confuso, ineficiente, e muito pouco prático.

Outra solução seria representar directamente a orientação através de uma matriz de rotação com relação à posição inicial e simplesmente multiplicar essa matriz por cada nova rotação aplicada ao objecto. Em princípio, isso funcionaria, e não exigiria o armazenamento de toda a história de rotação, que estaria condensada em uma só matriz. Essa solução, porém, também apresenta problemas. Em primeiro lugar, estamos usando uma matriz 3×3 para representar algo que só tem três graus de liberdade – ou seja, com certeza estamos guardando desnecessariamente informação redundante. Pior do que isso, as sucessivas multiplicações executadas sobre a matriz inevitavelmente acumulam erros, fazendo com que a orientação final se distancie da pretendida ou, pior ainda, a transformação representada pela matriz pode até mesmo deixar de ser uma rotação, distorcendo o objecto representado. Este último problema pode ser resolvido renormalizando periodicamente a matriz que representa a orientação, mas isto acrescenta ainda mais custo, complexidade e fontes de imprecisão.

Finalmente, poderíamos, a cada pequena rotação, recalcular os três ângulos de Euler que representam essa rotação. O problema com essa solução é que os novos ângulos de Euler não estarão necessariamente relacionados de nenhuma forma óbvia com os ângulos antes da rotação. Como já vimos anteriormente, às vezes, para girar em torno de um eixo precisamos executar uma outra rotação prévia em torno de outro eixo. Próximo aos pontos de gimbal lock haveria saltos ainda menos óbvios. O que precisamos é de um sistema de representação em que operações como “gire ao redor do eixo tal” possam ser executadas de forma natural e automática.

2. O problema da interpolação⁽²⁾ de orientações

A segunda dificuldade apresentada pela representação através de ângulos de Euler surge quando desejarmos interpolar entre duas orientações, isto é, produzir uma sequência de orientações intermediárias entre duas orientações dadas.

Mesmo que não se incorra no problema de gimbal lock, ainda assim não é óbvio como fazer com que um objecto execute uma transição suave entre duas orientações.

⁽²⁾ **Interpolação** consiste em determinar uma função, que assume valores conhecidos em certos pontos (nós de interpolação)

Novamente, temos aqui uma situação bem diferente do caso da translação simples, na qual a interpolação, pelo menos no caso mais trivial, é imediata. Se desejamos que um objecto se mova de forma suave entre duas posições percorrendo uma linha recta, simplesmente interpolamos linearmente cada uma de suas coordenadas, de forma independente, e o problema está resolvido – teremos produzido tantas posições intermediárias quantas quisermos ao longo da linha recta que liga as duas posições.

No caso de uma mudança de orientação, se estivermos trabalhando com ângulos de Euler, no entanto, essa solução não gera resultados muito satisfatórios. A interpolação aplicada sobre cada um dos ângulos de rotação gerará rotações independentes em torno desses eixos, ao invés de uma rotação suave e natural em torno do eixo desejado.

Como exemplo, consideremos o caso do nosso avião imaginário. Suponhamos que, ao realizar uma animação do seu movimento, desejemos que ele execute uma rotação da orientação $(0,0,0)$ até a orientação $(0,180,180)$. A primeira orientação é aquela que já conhecemos, do avião voando de cabeça para cima para o norte. A segunda pode-se concluir facilmente que corresponde ao avião voando de cabeça para baixo para o norte. Basta verificar que a rotação de 180° em torno do eixo leste/oeste deixa o avião voando de cabeça para baixo em direcção ao sul, e a posterior rotação em torno do eixo vertical o coloca voando de novo em direcção ao norte, mas ainda de cabeça para baixo.

Se simplesmente utilizarmos uma interpolação linear entre $(0,0,0)$ e $(0,180,180)$, produziremos orientações intermediárias que parecerão muito pouco naturais. Para virar de cabeça para baixo, o avião poderia simplesmente girar 180° em torno do eixo sul/norte. Com a interpolação linear de $(0,0,0)$ a $(0,180,180)$, entretanto, ele executará uma cambalhota estranha na qual girará simultaneamente em torno dos eixos leste/oeste e do vertical. A orientação final será a mesma, mas o movimento intermediário não.

O leitor deve procurar compreender a diferença entre as duas formas descritas de interpolar entre as duas orientações.

Transições entre outros pares de orientações utilizando interpolação linear⁽³⁾ dos ângulos de Euler em geral gerarão movimentos igualmente estranhos e imprevisíveis.

⁽³⁾ **Interpolação linear** é uma linha que se ajusta a dois pontos dados.

2.1. A interpolação “natural” entre orientações

Isso leva à seguinte questão: afinal, qual seria a forma “natural” de determinar posições intermediárias entre duas orientações? Em outras palavras, qual o “caminho” que um objecto deve seguir para transicionar suavemente de uma orientação para outra?

Para colocar melhor a questão, examinemos o caso da interpolação entre posições. Se desejamos que uma entidade se mova suavemente de uma posição para outra, devemos determinar uma sequência de posições intermediárias entre as posições inicial e final. Porém, dadas duas posições no espaço tridimensional, há uma infinidade de curvas que as ligam. O objecto poderia mover-se de uma posição a outra em ziguezague, ou passando primeiro por uma outra posição longínqua, ou através de outros caminhos arbitrariamente convolutos. No caso da translação, a solução mais simples e imediata para o problema é percorrer simplesmente uma linha recta, sem que o objecto execute quaisquer desvios “desnecessários”.

No caso da transição entre duas orientações, desejamos, em princípio, algo semelhante, ou seja, que a transição não inclua voltas e cambalhotas que nos pareçam “desnecessárias” para chegar à orientação final. Como formalizar esse conceito?

Felizmente, há uma solução bastante natural para a questão. Ela surge do facto (demonstrado por Euler) que sempre é possível chegar de uma orientação a outra através de uma rotação simples, ao redor de um único eixo. Logo, dadas duas orientações, basta executarmos uma interpolação linear simples no ângulo de rotação em torno desse eixo, que sabemos que necessariamente existe, para obtermos uma transição suave, única (fora o sentido de rotação) e sem “desvios”.

Esse eixo, porém, não é necessariamente um dos eixos coordenados, e a parametrização da orientação através de ângulos de Euler não leva, de forma prática ou natural, à realização de rotação ao redor de eixos arbitrários. Seria desejável encontrar uma parametrização na qual a transição entre duas orientações ocorresse naturalmente ao redor do eixo adequado e não seguindo um caminho arbitrário.

3.2.2. Rotação ao redor de um eixo

A forma mais “natural” de expressar tantas orientações como rotações arbitrárias seria, portanto, a especificação de um eixo e de um ângulo de rotação. Porém, como fazer para, a partir de um ponto no espaço, um eixo dado e um ângulo de rotação, determinar a nova posição do ponto após sofrer a rotação especificada?

De forma mais precisa, seja um ponto no R^3 representado por um vector $\vec{r}(r_x, r_y, r_z)$. Seja $\rho_{\theta, \vec{n}}$ uma rotação anti-horária de um ângulo em torno de um eixo que passa pela origem definido por um vector unitário $\vec{n}(n_x, n_y, n_z)$. Desejamos determinar uma expressão para $\rho(\vec{r})$, ou seja, para o vector que representa o ponto obtido após aplicação a (\vec{r}) a rotação ρ .

O problema pode ser resolvido decompondo (\vec{r}) por suas componentes normal \vec{r}_\perp e paralela \vec{r}_\parallel ao vector \vec{n} , aplicando a rotação separadamente a essas componentes e somando os resultados. Para obtermos a magnitude da componente de (\vec{r}) paralela ao vector \vec{n} , basta realizar o produto escalar entre \vec{n} e (\vec{r}) . Sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \\ \vec{r}_\parallel &= (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} \\ \vec{r}_\perp &= \vec{r} - \vec{r}_\parallel = \vec{r} - (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n}\end{aligned}\tag{12}$$

A componente \vec{r}_\parallel , naturalmente, permanece inalterada por uma rotação em torno do eixo definido por \vec{n} , de forma que temos

$$\rho(\vec{r}_\parallel) = \vec{r}_\parallel\tag{13}$$

Portanto, o problema que nos resta é determinar qual o resultado da rotação de \vec{r}_\perp . Sabemos, por definição, que esta rotação ocorrerá num plano paralelo a \vec{r}_\perp e perpendicular a \vec{n} . Logo, se definirmos o vector \vec{V} como

$$\vec{V} = \vec{n} \times \vec{r}_\perp = \vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_\parallel) = \vec{n} \times \vec{r} - \vec{n} \times \vec{r}_\parallel = \vec{n} \times \vec{r} \quad (14)$$

Teremos que \vec{n}, \vec{r}_\perp e \vec{V} formarão um triedro directo, e em particular que \vec{r}_\perp e \vec{V} serão perpendiculares e estarão no plano onde ocorrerá a rotação. Além disso, como \vec{n} é unitário, terá a mesma norma que \vec{r}_\perp . Portanto, é imediato verificar que:

$$\rho(\vec{r}_\perp) = (\cos \theta) \vec{r}_\perp + (\sin \theta) \vec{V} \quad (15)$$

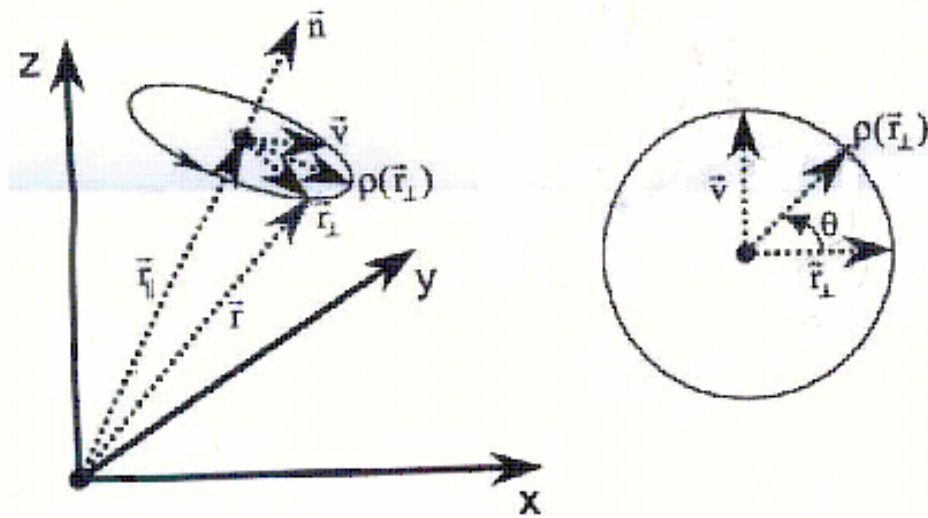


Fig.3-6: Rotação em torno de um eixo

Somando as componentes, encontramos que

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp) = \rho(\vec{r}_\parallel) + \rho(\vec{r}_\perp) = \vec{r}_\parallel + (\cos \theta) \vec{r}_\perp + (\sin \theta) \vec{V} = \\ &= (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} + (\cos \theta) \left[\vec{r} - (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} \right] + (\sin \theta) (\vec{n} \times \vec{r}) = \\ &= (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} + (\cos \theta) \vec{r} - (\cos \theta) (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} + (\sin \theta) (\vec{n} \times \vec{r}) = \\ &= (\cos \theta) \vec{r} + (1 - \cos \theta) (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} + (\sin \theta) (\vec{n} \times \vec{r}) \\ \Leftrightarrow \rho(\vec{r}) &= (\cos \theta) \vec{r} + (1 - \cos \theta) (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} + (\sin \theta) (\vec{n} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (16)$$

Desta forma, concluímos que o ponto resultante da realização de uma rotação $\rho(\theta, \vec{n})$ em um ponto (\vec{r}) é

$$\rho(\vec{r}) = (\cos \theta) \vec{r} + (1 - \cos \theta) (\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle) \vec{n} + (\sin \theta) (\vec{n} \times \vec{r}) \quad (17)$$

Como se pode observar, a realização de rotações em torno de eixos arbitrários leva a expressões extensas e pouco intuitivas se operarmos directamente com eixos cartesianos e ângulos. Os quaterniões nos fornecem um sistema de representação bem mais adequado para operar com rotações.

3.2.3. Generalizando os números complexos

Apresentada a solução para o problema de rotação bidimensional⁽¹⁾, pode parecer que não seria muito difícil construir um sistema semelhante para o tratamento de rotações tridimensionais.

Infelizmente, porém, a generalização dos complexos para o espaço tridimensional não é tão imediata e exigiu muito esforço até ser concebida.

Talvez um dos principais constrangimentos tenha sido o facto de que parece intuitivo imaginar que uma tal generalização se basearia em três parâmetros, ou seja, no acréscimo de um parâmetro extra para a dimensão extra acrescentada.

No entanto, embora apenas um grau de liberdade tenha sido acrescentado à translação, o impacto disso sobre as possibilidades de rotação é bem mais forte.

O facto é que, num mundo bidimensional, existe apenas um grau de liberdade de orientação, isto é, o que corresponde à rotação em torno da origem. Ao parametrizar uma rotação, precisamos especificar apenas seu ângulo, pois o eixo é obrigatoriamente o perpendicular ao plano considerado. Portanto, quando acrescentamos a terceira dimensão, ganhamos não um mas dois graus de liberdade de rotação, que precisam, para serem representados de forma similar à dos complexos, de uma unidade imaginária cada um.

O resultado é que a generalização dos complexos para o mundo tridimensional usa naturalmente não três mas quatro parâmetros e é correspondentemente constituída por números chamados de quaterniões.

Representação e composição de rotações

Passemos agora a descrever como os quaterniões podem ser usados para representar rotações no espaço.

⁽¹⁾ Ver Cap. 3.1. Rotações em 2D e números complexos págs. (43-45)

O ponto $\vec{r}(r_x, r_y, r_z)$ sobre o qual queremos executar uma rotação será representado por um quaterniões $p = (0, \vec{r})$ com parte real nula.

A rotação que aplicaremos sobre o ponto (\vec{r}) será representada por um quaterniões unitário $q = (s, \vec{v})$, isto é, um quaterniões q tal que $q\bar{q} = 1$.

Passaremos agora a mostrar que o resultado da rotação de p por q poderá ser obtido através da expressão

$$R_q(p) = qpq^{-1} \quad (18)$$

Como q é unitário, temos que o inverso de q é igual ao seu conjugado, pois,

$$q\bar{q} = 1 \Rightarrow q^{-1}q\bar{q} = q^{-1} \Rightarrow \bar{q} = q^{-1} \quad (19)$$

Logo, a expressão de rotação (18) pode ser escrita como

$$R_q(p) = qp\bar{q} \quad (20)$$

Expandindo a expressão (20), obtemos:

$$\begin{aligned} R_q(p) &= qp\bar{q} = (s, \vec{v})(0, \vec{r})(s, -\vec{v}) = (s, \vec{v})\left(0s - \langle \vec{r}, -\vec{v} \rangle, -0\vec{v} + s\vec{r} + \vec{r} \times (-\vec{v})\right) = \\ &= (s, \vec{v})\left(\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle, s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}\right) = \left[s\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) \rangle, s(s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) + \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle \vec{v} + \vec{v} \times (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v})\right] = \\ &= \left[s\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, s\vec{r} \rangle - \langle \vec{v}, -\vec{r} \times \vec{v} \rangle, s^2\vec{r} - s\vec{r} \times \vec{v} + \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle \vec{v} + \vec{v} \times s\vec{r} + \vec{v} \times (-\vec{r} \times \vec{v})\right] = \\ &= \left[s\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle - s\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{v}, (\vec{r} \times \vec{v}) \rangle, s^2\vec{r} + s\vec{v} \times \vec{r} + \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle \vec{v} + s\vec{v} \times \vec{r} + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})\right] = \\ &= \left[\langle \vec{v}, (\vec{r} \times \vec{v}) \rangle, s^2\vec{r} + \langle \vec{r}, \vec{v} \rangle \vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r} + \langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \vec{r}\right] = \\ &= \left[0, s^2\vec{r} - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \vec{r} + 2\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r}\right] \end{aligned}$$

$$R_q(p) = \left[0, s^2\vec{r} - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \vec{r} + 2\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle \vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r}\right] \quad (21)$$

Observação 3.1: na dedução acima, utilizamos as propriedades a seguir:

$$\begin{aligned} &\bullet \langle \vec{a}, (\vec{b} \times \vec{a}) \rangle = 0 \\ &\bullet \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\ &\bullet \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} \end{aligned} \quad (22)$$

Por outro lado, como $q = (s, \vec{v})$ é unitário, temos que $s^2 + \|\vec{v}\|^2 = 1$. Isso significa que sempre existe um ângulo θ tal que $s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\|\vec{v}\| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Logo, sempre podemos escrever q como

$$q = (s, \vec{v}) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n} \right), \quad \text{onde} \quad \|\vec{n}\| = 1 \quad (23)$$

Se substituirmos agora esta interpretação de q na expressão obtida anteriormente para o resultado da rotação, obteremos

$$\begin{aligned} & \left[0, s^2 \vec{r} - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \vec{r} + 2(\vec{v} \cdot \vec{r}) \vec{v} + 2s \vec{v} \times \vec{r} \right] = \\ & = \left[0, \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \vec{r} - \left(\left\langle s \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n}, s \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n} \right\rangle \right) \vec{r} + 2 \left(s \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n} \cdot \vec{r} \right) s \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n} + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(s \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{n} \right) \times \vec{r} \right] = \\ & = \left[0, \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \vec{r} - \left(s \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \right) \vec{r} + \left(2s \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + \left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \vec{n} \times \vec{r} \right] = \\ & = \left[0, \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \vec{r} - \left(s \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \vec{r} + (1 - \cos \theta) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \times \vec{r} \right] = \\ & = \left[0, \vec{r} \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + (1 - \cos \theta) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \times \vec{r} \right] = \\ & = \left[0, (\cos \theta) \vec{r} + (1 - \cos \theta) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \times \vec{r} \right] \\ & \Leftrightarrow R_q(p) = \left[0, (\cos \theta) \vec{r} + (1 - \cos \theta) \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \times \vec{r} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Observação 3.2: na dedução acima, utilizamos as identidades a seguir:

$$\begin{aligned} & \bullet \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2 \\ & \bullet \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos \theta \\ & \bullet 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos \theta \\ & \bullet 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin \theta \end{aligned} \quad (25)$$

Se compararmos agora a parte imaginária da expressão obtida acima em (24) com a que derivamos em (16), verificamos que são exactamente idênticas.

Isso significa que se desejamos aplicar a um ponto (\vec{r}) uma rotação anti-horária de um ângulo θ ao redor do eixo definido pelo vector unitário \vec{n} , podemos resolver a questão com quaterniões do seguinte modo:

- Representamos (\vec{r}) pelo quaternião $p = (0, \vec{r})$
- Representamos a rotação desejada pelo quaternião $q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} \right]$
- Realizamos a operação $R_q(p) = qp\bar{q}$
- A parte real do resultado será zero e a parte imaginária conterá o resultado da rotação

Essa pode parecer, a princípio, uma forma tortuosa de obter o mesmo resultado. Porém, examinemos o que ocorre com a **composição de duas rotações**. Suponhamos dois quaterniões q_1 e q_2 representando duas rotações distintas. Aplicando sobre um ponto p a rotação composta de q_1 seguida de q_2 obteríamos

$$R_{q_2}(R_{q_1}(p)) = R_{q_2}(q_1 p \bar{q}_1) = q_2 q_1 p \bar{q}_1 \bar{q}_2 = q_3 p q_4 \quad (26)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} q_3 &= q_2 q_1 = (s_2, \vec{v}_2)(s_1, \vec{v}_1) = (s_2 s_1 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle, s_2 \vec{v}_1 + s_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \Rightarrow \\ \bar{q}_3 &= (s_2 s_1 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle, -s_2 \vec{v}_1 - s_1 \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \times \vec{v}_1) = (s_2 s_1 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle, -s_2 \vec{v}_1 - s_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \\ q_4 &= \bar{q}_1 \bar{q}_2 = (s_1, -\vec{v}_1)(s_2, -\vec{v}_2) = (s_1 s_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, -s_1 \vec{v}_2 - s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \bar{q}_3 \end{aligned} \quad (27)$$

Isto significa que a rotação composta pode ser representada directamente por $q_3 = q_2 q_1$, já que

$$q_4 = \bar{q}_3 \Rightarrow q_3 p q_4 = q_3 p \bar{q}_3 = R_{q_3}(p) \quad (28)$$

Portanto, com essa parametrização, obtemos uma grande vantagem: a composição de rotações é realizada naturalmente pela própria álgebra dos quaterniões. Se dispomos de dois quaterniões unitários que representam duas rotações de ângulos diferentes em torno de eixos distintos, e desejamos encontrar uma representação para a rotação que resulta da composição dessas duas rotações, basta multiplicarmos os dois quaterniões. Como resultado, obteremos automaticamente um novo quaternião unitário cuja parte imaginária será um vector na direcção e

sentido do eixo da rotação resultante e a parte real o co-seno do ângulo de rotação. Desse modo, estaremos sempre descrevendo nossas rotações da forma “natural” (e única salvo o sentido de rotação) que buscávamos.

Para ilustrar esse facto, voltemos ao nosso exemplo da orientação de um avião. Resolvamos, agora por meio de quaterniões, o exemplo em que o piloto, inicialmente voando para o norte, primeiro realiza uma rotação de 90° em torno do eixo leste/oeste (voltando o nariz para o solo) e depois outra de 90° em torno do eixo sul/norte (voltando a asa esquerda para o céu).

A primeira rotação será representada pelo quaternião

$$q_1 = \left[\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right), \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)(0,1,0) \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0) \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right]$$

E a segunda rotação pelo quaternião

$$q_2 = \left[\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right), \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)(1,0,0) \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,0) \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \right]$$

A rotação composta, portanto, será

$$\begin{aligned} q_3 = q_2 q_1 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right] = \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right\rangle, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) \times \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2} - (0+0+0), \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \frac{1}{2}(1,0,0) \times (0,1,0) \right] = \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a rotação deduzida acima sobre $\vec{r}_1(10, -5, 0)$, obtemos:

$$\begin{aligned} q_3(0, \vec{r}_1) \overline{q_3} &= \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] [0, (10, -5, 0)] \left[\frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] \left[0 + \left\langle (10, -5, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\rangle, 0 + \frac{1}{2}(10, -5, 0) - (10, -5, 0) \times \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] \left[\left(\frac{10}{2} - \frac{5}{2} + 0\right), \left(\frac{10}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) - \left(-\frac{5}{2} - 0, 0 - \frac{10}{2}, \frac{10}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \left[\frac{5}{2}, \left(\frac{10}{2}, -\frac{5}{2}, 0 \right) - \left(-\frac{5}{2}, -\frac{10}{2}, \frac{15}{2} \right) \right] = \\
 &= \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \left[\frac{5}{2}, \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2} \right) \right] = \\
 &= \left[\frac{5}{4} - \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2} \right) \right\rangle, \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2} \right) + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{2} \right) \right] = \\
 &= \left[\frac{5}{4} - \left(\frac{15}{4} + \frac{5}{4} - \frac{15}{4} \right), \left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{15}{4} \right) + \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right) + \left(-\frac{15}{4} - \frac{5}{4}, \frac{15}{4} - \left(-\frac{15}{4} \right), \frac{5}{4} - \frac{15}{4} \right) \right] = \\
 &= \left[\frac{5}{4} - \frac{5}{4}, \left(\frac{20}{4}, \frac{10}{4}, -\frac{10}{4} \right) + \left(-\frac{20}{4}, \frac{30}{4}, -\frac{10}{4} \right) \right] = \left[0, \left(0, \frac{40}{4}, -\frac{20}{4} \right) \right] = [0, (0, 10, -5)]
 \end{aligned}$$

Isso corresponde a uma rotação anti-horária de $\theta = 2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$ em torno do eixo definido pelo vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Para conferir que esta rotação simples em torno de um único eixo realmente corresponde à composição das duas rotações dadas, vamos aplicá-la ao nosso avião. Suponhamos um ponto na asa direita do avião, com ele voando em sua orientação inicial, voltado para o norte. Imaginemos que esse ponto ocupe a posição $\vec{r}_1(10, -5, 0)$, ou seja, a dez unidades a norte da origem, cinco para o leste e a zero de altura. Já sabemos que após as duas rotações, o avião deverá estar voando para o oeste, com a asa direita apontando para o solo, ou seja, com $\vec{r}_2(0, 10, -5)$.

Ou seja, simplesmente multiplicando quaterniões, somos capazes de descobrir a parametrização em coordenadas “naturais” da composição de um número arbitrário de rotações e de aplicar essas rotações a pontos dados. Dessa forma, para representar a orientação de um objecto, precisamos de somente um quaternião unitário.

Mais do que isso, estamos livres também do problema de gimbal lock. Não existem eixos preferenciais ou perda de graus de liberdade nesta parametrização. A partir de qualquer rotação ou posição, podemos aplicar qualquer outra rotação, sem restrições.

Exercícios

3.1. Utilizar o quaternião para representar uma rotação em 3D de 90° ($\frac{\pi}{2}$ radiano) sobre a linha central z:

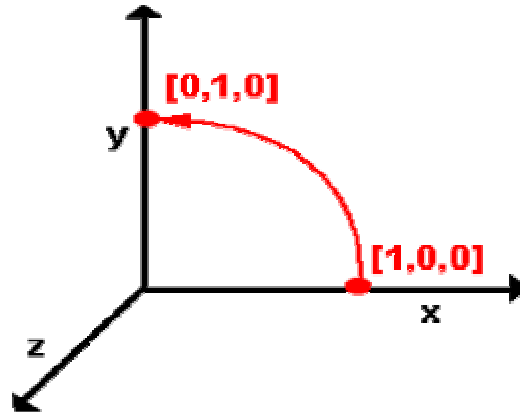


Fig. 3-7

Resolução

$q = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i0 + j0 + k\frac{\sqrt{2}}{2}$ Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\vec{n}(0,0,1)$ (o eixo de rotação) eixo dos z. Repara que o quaternião q é unitário e $\|\vec{n}\| = 1$.

Assim mostramos que o ponto $(1,0,0)$ estará girado a $(0,1,0)$

Vamos representar o ponto $(1,0,0)$ pelo quaternião $p_1 = 0 + i1 + j0 + k0$

Aplicamos então o quaternião q como segue:

$$p_2 = R_q(p_1) = q \cdot p_1 \cdot \bar{q} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (i1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Multiplicamos algebricamente os primeiros dois quaterniões da primeiramente,

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + ki\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(i\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - k\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Multiplicamos então os quaterniões restantes, obtemos:

$$= i\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = j$$

O qual se converte ao ponto $p_2(0,1,0)$ por uma rotação anti-horária de 90° em torno da linha central z.

3.2. Determinar a rotação em 3D do ponto $p(1,1,1)$, em torno da linha central $\vec{n}(2,2,1)$, de um ângulo de amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (90°).

Resolução

Vamos representar o ponto $p(1,1,1)$ pelo quaternião $p_1 = 0 + i + j + k$, e

$q = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $\|\vec{n}\| = 1$. Como $\|\vec{n}\| = \sqrt{9} = 3 \neq 1$ então temos que normalizá-lo.

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{2i + 2j + k}{3}, \text{ logo}$$

$$q = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2i + 2j + k}{3}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ onde } \|\vec{n}\| = 1$$

Aplicamos então o quaternião q como segue:

$$\begin{aligned} p_2 &= R_q(p_1) = qp_1\bar{q} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(2i + 2j + k)\sqrt{2}}{6}\right) \cdot (i + j + k) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{(2i + 2j + k)\sqrt{2}}{6}\right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{3} + \frac{j\sqrt{2}}{3} + \frac{k\sqrt{2}}{6}\right) \cdot (i + j + k) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{3} - \frac{j\sqrt{2}}{3} - \frac{k\sqrt{2}}{6}\right) = \\ &= \left[-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) + j\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + k\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right] \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{3} - \frac{j\sqrt{2}}{3} - \frac{k\sqrt{2}}{6}\right) = \\ &= \left(-\frac{5\sqrt{2}}{6} + \frac{4\sqrt{2}i}{6} + \frac{2\sqrt{2}j}{6} + \frac{\sqrt{2}k}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{3} - \frac{j\sqrt{2}}{3} - \frac{k\sqrt{2}}{6}\right) = \\ &= \left(-\frac{5}{6} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6}\right) + i\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + j\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) + k\left(\frac{5}{18} + \frac{1}{2} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) = \\ &= \left(-\frac{4}{6} + \frac{6}{9}\right) + i\left(\frac{4}{9} + \frac{9}{9}\right) + j\left(\frac{7}{9}\right) + k\left(\frac{7}{9} - \frac{9}{9}\right) = \left(0 + \frac{13}{9}i + \frac{7}{9}j - \frac{2}{9}k\right) \end{aligned}$$

O qual se converte ao ponto $p_2\left(\frac{13}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{2}{9}\right)$ por uma rotação anti-horária de 90° em torno da

linha central \vec{n} .

Exercícios Propostos

3.3. Determinar a rotação em 3D do ponto $p(1,0,0)$ em torno do eixo dos yy de um ângulo de amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (90°).

3.4. Determinar a rotação em 3D do ponto $p(2,0,1)$ em torno do eixo dos xx de um ângulo de amplitude $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (60°).

3.5. Determinar a rotação em 3D do ponto $p(2,1,0)$, em torno da linha central $\vec{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de um ângulo de amplitude $\varphi = \pi$ (180°).

3.6. Determinar a rotação em 3D do ponto $p(1,1,0)$, em torno da linha central $\vec{n}(3,4,0)$, de um ângulo de amplitude $\varphi = \pi$ (180°).

3.7. Seja C um cubo que admite $V_1(1,0,0)$ como vértice. Encontrar dois vértices do cubo, sabendo que cada um deles dista do consecutivo de um ângulo de amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (90°).

Lema 3.1. Sejam $q \in H_1$ e $p = p_0 + P \in H$ onde $p_0 = a$ e $P = ib + jc + kd$ Então: $qpq^{-1} = p'$, Onde $p' \in H$ é tal que: $p' = p_0 + P'$ e $\|P\| = \|P'\|$.

Demonstração:

Começamos por provar que $\text{Re}(p') = p_0 = \text{Re}(p)$

Como $q^{-1} = \bar{q}$ para $q \in H_1$ e $\text{Re}(p') = \frac{p' + \bar{p}'}{2}$, obtemos,

$$2\text{Re}(p') = qp\bar{q} + \overline{qp\bar{q}} = q(p_0 + P)\bar{q} + q(p_0 - P)\bar{q} = 2p_0.$$

Acabamos de provar que $p' = p_0 + P'$. Resta provar que $\|P\| = \|P'\|$, ou ainda que $\|p\| = \|p'\|$. Mas,

$$\|p'\| = \|qpq^{-1}\| = \|q\| \cdot \|p\| \cdot \|q^{-1}\| = \|p\|. \square$$

Teorema 3.1. Seja o vector \overrightarrow{OA} roda-se à volta do eixo, determinado pelo ort. \overrightarrow{ON} , em φ . Além disso $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{ON}$. Se os vectores \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{ON} se determinam pelos quaterniões a e n , então o vector \overrightarrow{OB} -resultado da rotação, se determina pelo quaternião $b = (\cos \varphi + \vec{n} \sin \varphi) \vec{a}$.

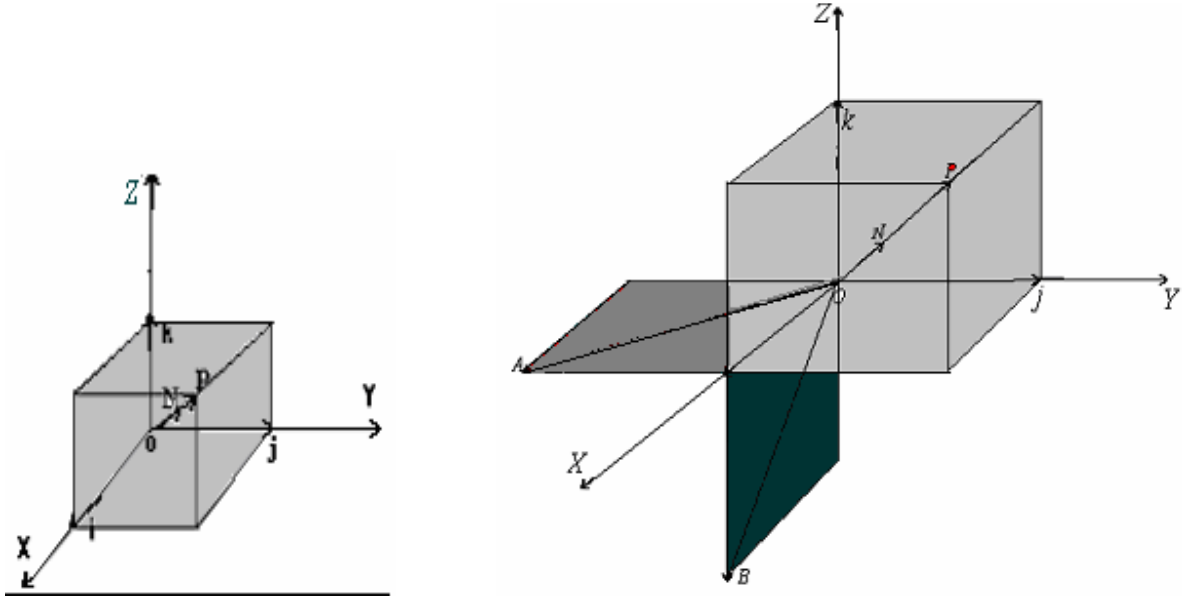


Fig. 3-8

Demonstração:

$$\|\overrightarrow{ON}\| = 1, \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} \rangle = 0, \overrightarrow{OA} = \vec{a} \text{ e } \overrightarrow{ON} = \vec{n} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

Consideremos o vector \vec{a} dado pelo quaternião $a = 0 + \vec{a}$ e o quaternião unitário $n = t + \vec{q}_1$ $\vec{q}_1 \in \mathbb{R}^3$.

A rotação do a em torno do n por um ângulo φ é dado por:

$$\overrightarrow{OB} = R_n(a) = nan^{-1} = nan \quad (29)$$

Como n é unitário $n^{-1} = \bar{n} = t - \vec{q}_1$, fazemos a respectiva substituição na expressão (29) obtemos:

$$\begin{aligned} R_n(a) &= nan^{-1} = nan = (t + \vec{q}_1)(0 + \vec{a})(t - \vec{q}_1) = (t + \vec{q}_1)[0.t + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle + 0.(-\vec{q}_1) + t.\vec{a} + \vec{a} \times (-\vec{q}_1)] = \\ &= (t + \vec{q}_1)[\langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle + t\vec{a} - \vec{a} \times \vec{q}_1] = (t + \vec{q}_1)[\langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle + (t\vec{a} - \vec{a} \times \vec{q}_1)] = \\ &= t\langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle - \langle \vec{q}_1, (t\vec{a} - \vec{a} \times \vec{q}_1) \rangle + t(t\vec{a} - \vec{a} \times \vec{q}_1) + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times (t\vec{a} - \vec{a} \times \vec{q}_1) = \\ &= t.\cancel{\langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle} - \langle \vec{q}_1, t.\vec{a} \rangle + \langle \vec{q}_1, (\vec{a} \times \vec{q}_1) \rangle + t.t\vec{a} - t(\vec{a} \times \vec{q}_1) + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times t\vec{a} - \vec{q}_1 \times \vec{a} \times \vec{q}_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \vec{q}_1, (\vec{a} \times \vec{q}_1) \rangle + t^2 \vec{a} - t(\vec{a} \times \vec{q}_1) + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times t\vec{a} - \vec{q}_1 \times \vec{a} \times \vec{q}_1 = \quad \left[\quad \langle \vec{q}_1, (\vec{a} \times \vec{q}_1) \rangle = 0 \quad \right] \\
 &= t^2 \vec{a} - t(\vec{a} \times \vec{q}_1) + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - t(\vec{a} \times \vec{q}_1) - \vec{q}_1 \times \vec{a} \times \vec{q}_1 = \\
 &= t^2 \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \vec{q}_1 \times \vec{a} \times \vec{q}_1 - 2t(\vec{a} \times \vec{q}_1)
 \end{aligned}$$

Temos que para $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^3$, $V_1 \times (V_2 \times V_3) = \langle V_1, V_3 \rangle \times V_2 - \langle V_1, V_2 \rangle \times V_3$ obtemos

$$\begin{aligned}
 R_n(a) &= t^2 \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \times \vec{a} + \langle \vec{q}_1, \vec{a} \rangle \times \vec{q}_1 - 2t(\vec{a} \times \vec{q}_1) = \\
 &= t^2 \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{q}_1 \rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \times \vec{a} + \langle \vec{q}_1, \vec{a} \rangle \times \vec{q}_1 + 2t(\vec{q}_1 \times \vec{a}) = \\
 &= t^2 \vec{a} - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \times \vec{a} + 2\langle \vec{q}_1, \vec{a} \rangle \times \vec{q}_1 + 2t(\vec{q}_1 \times \vec{a})
 \end{aligned}$$

Como $n = t + \vec{q}_1$ é unitário, pode ser reescrito como, $n = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, onde $\|\vec{n}\| = 1$

Substituímos $\vec{q}_1 = \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ e $t = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 R_n(a) &= \left[t^2 - \langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle \right] \vec{a} + 2\langle \vec{q}_1, \vec{a} \rangle \times \vec{q}_1 + 2t(\vec{q}_1 \times \vec{a}) = \\
 &= \left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left\langle \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\rangle \right] \vec{a} + 2\left(\left\langle \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \vec{a} \right\rangle \right) \times \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(\vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \times \vec{a} \right) = \\
 &= \left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \vec{a} + 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) (\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle) \times \vec{n} + 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot (\vec{n} \times \vec{a}) = \\
 &= \left[\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \vec{a} + 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot (\vec{n} \times \vec{a}) = \cos(\varphi) \vec{a} + \sin(\varphi) \cdot (\vec{n} \times \vec{a}) = \\
 &= (\cos(\varphi) + \vec{n} \sin(\varphi)) \vec{a} . \quad \square
 \end{aligned}$$

Corolário 3.1.1. Qualquer rotação de ângulo φ em torno de um eixo \vec{n} , com $\|\vec{n}\| = 1$ pode ser obtido através de um quaternião unitário.

Demonstração:

No teorema anterior escolhe-se q de modo que $q = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{n} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Assim, é obtida a rotação desejada. \square

Exemplo 3.4: Consideremos uma rotação de ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$, em torno do vector

$(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$. O quaternião que representa esta rotação é: $q = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)j = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$.

CONCLUSÃO

O trabalho científico ora findo é fruto de uma pesquisa bibliográfica cuidada e orientada, apresenta um estudo, ainda incompleto, sobre os quaterniões e sua utilização para representação de rotação no espaço 3D.

A sua realização constitui para mim um momento importante de experiência positiva e alargamento do meu horizonte de conhecimento, pois, adquiri muitos conhecimentos, sobre o tema em estudo bem como também sobre temas com ele relacionados e sobre matemática em si.

Com a elaboração deste trabalho ficou claro em mim, a existência de um outro conjunto de números ainda maior que o conjunto dos complexos. Então neste caso conclui que podemos citar as seguintes relações entre os conjuntos de números $N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset H$.

Fiquei ainda com uma ideia muito mais clara acerca da aplicabilidade da matemática, através do conhecimento de muitos casos da aplicação dos quaterniões em diversas áreas. Dando aos conceitos já estudados uma outra técnica para a sua compreensão e para o ensino. Técnicas estas que são consideradas como mais fáceis, mais rápidas e com maior grau de precisão.

A matemática deixou de ser tão abstracta como era antes, passando a ser um dos métodos para resolver certos problemas do quotidiano.

O uso do computador proporcionou-me a aquisição de novos conhecimentos e aplicação dos mesmos.

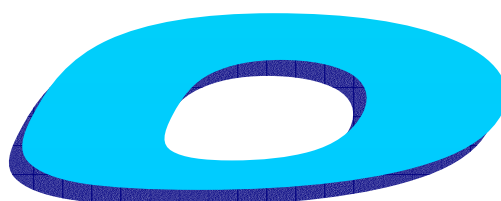
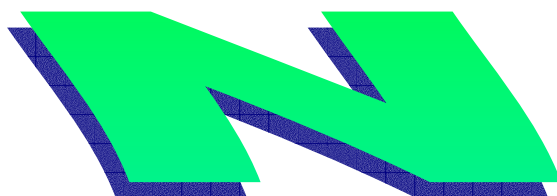
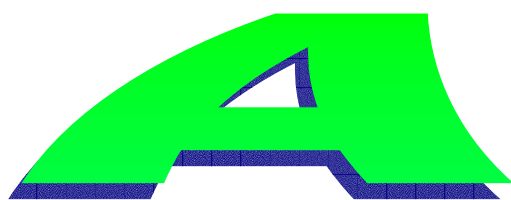
Este tema de uma forma ou outra não faz parte do currículo do ensino secundário, mas há muitos temas com ele relacionados que faz parte do ensino secundário.

Como se trata de números, conclui que os quaterniões têm todas as propriedades em comum com os outros números, maioria desses, abordados no ensino secundário, com excepção à propriedade comutativa da multiplicação. Daí trouxe-me, como professor do ensino secundário, conhecimentos, dando-me um maior domínio sobre a matemática, preparando-me para novos desafios que venha a ocorrer e também preparando-me para mais e melhores opções na escolha de estratégias e metodologias adequadas ao ensino, faz com que, o trabalho apresentado se revista de extrema importância.

Espero que este trabalho contribua de uma forma positiva no conhecimento e desenvolvimento das capacidades dos futuros iniciantes na área e também dos leitores.

FONTES BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A.L,Cauchy. **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1^{ère} partie :Analyse Algébrique**.Lisboa. Éditions Jaques Gabay.1992.
- [2] BUDDEN, F.J.(1972) **LA FASCINATION DES GROUPES**. Paris. O.C.D. L.1976.
- [3] CARL, Boyer. **História da matemática**, Gomide. São Paulo. Editora Edgard Blucher LTDA.1974.
- [4] J.SANTOS, REGINALDO. **UM CURSO DE GEOMETRIA ANALITICA E ÁLGEBRA LINEAR**. Belo Horizonte. Impresa universitária da UFMG. 2000.
- [5] L.S, Pontriaguin. (1978) **GRUPOS CONTINUOS**. Espanha. EDITORIAL MIR MOSCU. 1978.
- [6] M.B.,Balk, G.D.,Balk, e A.A.,Poluxin. **Aplicações reais dos números imaginários**.Kiev. “Radanska scola”. 1988. (tradução de Russo).
- [7] T. MAGALHÃES, Luís. **ÁLGEBRA LINEAR COMO INTRODUÇÃO A MATEMÁTICA APLICADA**. Lisboa. Texto Editor, LDA. 1996.
- [8] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Quaterni%C3%B5es>
- [9] <http://.mat.uc.pt/~wsquatro/>
- [10] <http://wwwgoogle.com/search?hl=pt-BR&q=Quaterni%C3%B5es&lr>



Soluções dos exercícios propostos

Página	Enumeração	Alínea	Solução/Sugestão
17	2.2	a)	$q = 5 - i + j - k$
		b)	$q = i + j - k$
		c)	$q = a + ib + jc - kd$
	2.3		Escrever i, j, k na forma de um quaternião como segue: $i = 0 + i + j0 + k0$, $j = 0 + i0 + j + k0$ e $k = 0 + i0 + j0 + k$ e depois efectuar as operações indicadas.
23	2.4	a)	$-4 + i + j$
		b)	$-4 + 2i + j + k$
		c)	$15 - 7i$
		d)	$11 - 2i + j$
		e)	$8 - 12i + 6j + 4k$
		f)	$-18 + 28i + 39j - 6k$
	2.5	ii)	Tomando $q = a + ib + jc + kd$, $p = e + if + jg + kh$ e $q' = a' + ib' + jc' + kd'$ Efectuando as operações no primeiro membro, efectuando as operações no segundo membro e comparando os resultados obtém-se o pretendido.
		iii)	
		iv)	
30	2.7	a)	$q_1 + q_2 = 2 + j$
		b)	$q_2 / q_1 = \frac{-4 + i + j + 2k}{11}$
		c)	$q_1 \setminus q_2 = \frac{-4 + i - j - 2k}{2}$
	2.8	a)	Tomando $q = a + ib + jc + kd$, $p = e + if + jg + kh$ e efectuar as operações indicadas no primeiro membro para obter a expressão do segundo membro.
		b)	
		c)	
		d)	
		e)	Tomando $q = a + ib + jc + kd$, e efectuando as operações indicadas no segundo membro facilmente chega-se a expressão do primeiro membro.
		f)	

30	2.8	g)	Tomando $q = a + ib + jc + kd$, $p = e + if + jg + kh$. Efectuando as operações facilmente obtém-se a expressão do 2º membro.
		h)	Tomando $q = a + ib + jc + kd$, é fácil ver que $\ -q\ = \ q\ $
		i)	Expressando a distância à custa da norma, efectuando as operações no 1º membro facilmente obtém-se o pretendido.
35	2.11	a)	$q = -1$
		b)	$q = \sqrt{3} + i + k$
		c)	$q = \frac{1}{2} + (1+i)\frac{\sqrt{3}}{2}$
	2.12	a)	$q_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
		b)	$q_4 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{j+k}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$
		c)	$q_5 = 3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$
	2.13		Fazendo $q^2 = q \cdot q$ e $\ q\ ^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, substituir na expressão do 1º membro, depois efectuar a simplificação das expressões.
68	3.3		O ponto resultante da rotação será $p_2(0, 0, -1)$
	3.4		O ponto resultante da rotação será $p_2\left(2, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
	3.5		O ponto resultante da rotação será $p_2(0, -1, 2)$
	3.6		O ponto resultante da rotação será $p_2\left(\frac{17}{25}, \frac{31}{25}, 0\right)$
	3.7		Utilizando quaterniões para efectuar uma rotação de V_1 de um ângulo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ em torno do eixo dos zz , obtém-se o vértice $V_2(0, 1, 0)$. De seguida utiliza-se de novo o quaterniões para efectuar uma rotação do V_2 de um ângulo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ em torno do eixo dos xx , obtém-se o vértice $V_3(0, 0, 1)$.

	Dimensão	$\sqrt{-1}$ sim	Multiplicação comutativo	Multiplicação associativo
<i>Números reais</i> \mathbb{R}	1	não	Sim	sim
<i>Números complexos</i> \mathbb{C}	2	Sim	Sim	Sim
<i>Quaterniões</i> \mathbb{H}	4	Sim	não	Sim